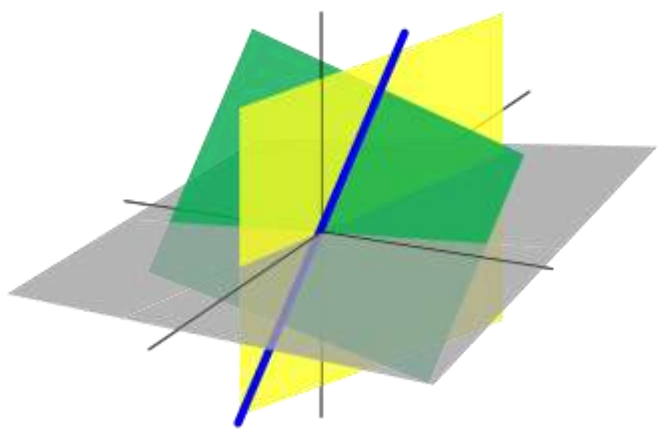
ליניארית של סלע: ליניארית 1 למתמטיקאים, 2011

מבוסס על קורס 80134 – ליניארית למתמטיקאים, האוניברסיטה העברית, ירושלים

מהדורה II, אוקטובר 2011

*"Education is not **filling a bucket**, but **lighting a fire**"*

- *William Butler Yeats*



תת-מרחב וקטורי חד-מימדי, ושלושה מישורים דו-מימדיים מוכלים במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$. –ויקיפדיה

מוקדש ללימור מקייטן, כמובן

הקדמה

כשאני הייתי סטודנט בשנה א' נורא הרגיז אותי שאין ספר נורמלי ללמוד ממנו אלגברה ליניארית. כמובן שקיימים ספרים רבים לנושא, אבל רובם יקרים, באנגלית, מיושנים, גרועים, ובעיקר נכתבו ע"י פרופסורים למתמטיקה – בשפה פורמלית בלבד, שלא נוחה לרוב האנשים ולסטודנטים. הגישה באוניברסיטאות לרוב מסתמכת יותר על לימוד שבעל-פה, וזאת בכלל שיטה לא טובה ללמוד.

הספר הזה חינם, ומתיימר ללמד את עיקרי נושאי הליבה הרלוונטים לאלגברה ליניארית. הספר כולל את עיקרי החומר, כולל דוגמאות, וכן את רשימת כל המשפטים וההוכחות אשר נדרשים להבנת החומר.

מיותר לציין שאם אתם לומדים אלגברה ליניארית במסגרת האוניברסיטה, אל תסתמכו על ספר זה בלבד, אלא ראו בו משלים ומבהיר לחומר המועבר בהרצאות ובתרגולים.

בשתי מילים – ספר זה מחולק לשני חלקים: חלק ראשון אשר כולל הסברים תיאורטיים על החומר, וחלק שני אשר כולל את רשימת המשפטים וההוכחות שלהם למבחן. מובן ששני החלקים תלויים זה בזה: אי אפשר להבין את מהות המשפטים בלי להבין את החומר. ע"מ להבין את החומר לא צריך לדעת בעל-פה את ההוכחות, אך הבנת המשפטים עוזרת רבות בהבנת החומר.

זה הוא סיכומי החומר בליניארית, ונועד לעזור ללימודים ב<u>מקביל</u> לחומר שמועבר בהרצאות באוניברסיטה. הספר כולל את עיקרי החומר, כולל דוגמאות, וכן את רשימת כל המשפטים וההוכחות אשר נלמדו (ונדרשו למבחן) בשנה'ל 2009-2010.

הספר מחולק לשני חלקים: חלק ראשון אשר כולל הסברים תיאורטיים על החומר, וחלק שני אשר כולל את רשימת המשפטים וההוכחות שלהם למבחן. שני החלקים תלויים זה בזה: אי אפשר להבין את מהות המשפטים בלי להבין את החומר. ע"מ להבין את החומר לא צריך לדעת בעל-פה את ההוכחות, אך הבנת המשפטים עוזרת רבות בהבנת החומר.

נציין, כי אלגברה ליניארית הינו מקצוע הוליסטי: חלוקתו לנדבכים איננה אפקטיבית, ומהותו להבין את כולו כשלם. ככזה, הלימוד שלו לעיתים קרובות גורר בהכרח חזרה על החומר – כאשר קבוצת מושגים שונים קשורים זה בזה, לא ניתן להבין את הראשון עד שלא מבינים את האחרון, ביחד. התלמיד ימצא את עצמו חוזר מעת לעת על החומר, ואכן, ייתכן שרק לקראת סוף השלמת פרק מסוים, יובן הפרק במלואו, כולל התחלתו.

ספר זה חינם וזמין בכתובת https://sites.google.com/site/linearit1hujibook/ או אצל המחבר (sella.rafaeli@gmail.com). אם השגתם את הספר ממקום אחר, ייתכן שאינכם קוראים את הגרסה העדכנית ביותר.

שיהיה לכולנו בהצלחה.

סלע רפאלי,

אוקטובר 2011

הערות על המשפטים

החלק הראשון של הספר הוא תיאורטי, והשני משפטים והוכחות. רשימת המשפטים מורכבת ממשפטים אשר נלמדו בקורס של פרופ' איליה ריפס באוניברסיטה העברית בשנה"ל 2009-2010. ראוי להבהיר, כי בתחום האלגברה הליניארית (בדומה לתחומים רבים במתמטיקה) אין קבוצה אחת ויחידה של משפטים שניתן ללמד. את החומר ניתן להציג לפי סדר כזה או אחר, וכך גם את המשפטים. בפרט, ניתן להגדיר מונח באופן א' ולהוכיח מכך את משפט ב'; להבדיל, ניתן להגדיר את המונח דרך משפט ב' ולגזור מתוך כך את מונח א'. מסיבה זו ואחרות, כאמור, אין (לא רק באוניברסיטה, אלא בעולם) הסכמה מדויקת על רשימת המשפטים. הרשימה המופיעה כאן כוללת את המשפטים שסטודנטים ב-2009-2010 נדרשו לדעת. אנו ממליצים לסטודנט לוודא מול סגל הקורס את רשימת המשפטים אשר נלמדו בסמסטר בו הוא לומד. ניתן, כמובן, להיעזר ברשימה המופיעה במסמך זה כבסיס להשוואה.

הערות על הכתיב

- לעיתים במסמך אנו כותבים F ולעיתים $\mathbb{F}$ (וכך גם עם שאר האותיות, למשל R או $\mathbb{R}$). שניהם שקולים זה לזה.
- כמעט תמיד יצוין במפורש, אך הסימונים הבאים הם המקובלים:
  - F (ו- $\mathbb{F}$) מציינים <u>שדה</u>, ו-a ו-b מציינים איבר בשדה (סקלר).
  - V מציין <u>מרחב וקטורי</u>, ו-v מציין וקטור (איבר במרחב וקטורי). (וכך גם U לעומת u, וכו')
- המסמך מניח כי הקוראים מכירים סימונים מתמטים מקובלים, וכן מונחים מתמטיים בסיסיים כגון פונקציה, חד-חד-ערכית (חח"ע) ועל, וכיו'ב. עבור מי שאינו מכיר, את ביאורם של רובם המוחלט של הסימונים ניתן למצוא כאן: http://he.wikipedia.org/wiki/סימון_מתמטי
  - נוסיף תיאור קצר לסימון הבא (למי אינו מכיר אותו): $A=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x+1<5\}$. הסוגריים המסולסלות מציינות קבוצה; הקו האנכי בקבוצה מגדיר 'כל איבר (כפי שמוגדר בצד שמאל), <u>כך ש</u>(מה שמוגדר בצד ימין)'. כך, הביטוי לעיל נקרא בתור 'קבוצה A כוללת כל x <u>כך ש</u>-x שייך ל- $\mathbb{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים), ו-x+1<5'. כלומר, A שקולה לקבוצה {1,2,3}. שימו לב שקבוצה זו יכולה להיות גם אינסופית.

הערות על התוכן

סוגיות קטנות אשר חסרות בספר: (ייתכן שתוכנסנה לגרסא הבאה):

- הוכחת יחידות גודל הבסיס (למ"ו V, כל בסיס יהיה בעל גודל זהה).
- הוכחה שכפל מטריצות הוא אסוציאטיבי (מופיע ללא הוכחה)
- אם למטריצה A שתי שורות זהות, אזי detA=0 (מופיע ללא ההוכחה).

- באופן כללי נמנענו מלהתייחס לתכונות הכלליות של מולטי ליניאריות ואנטי סימטריות (של פונקציות באשר הן), ומופיעה רק ההתייחסות בהקשר לדטרמיננטה בעצמה.
- הוכחת דטרמיננטה של מטריצה משולשית, ומשולשית בלוקים הובאו בקצרה בלבד ובאופן לא-פורמלי.
- נוסחת פיתוח לפי שורה ועמודה הוכנסה ללא הוכחה, ואף ללא התייחסות לסוגיה של מה קורה כשיש שתי שורות זהות (שהדטרמיננטה יוצאת אפס).
- נוסחת קרמר ו-Adjoint לא הוכנסו.

באופן כללי, תחום האלגברה הליניארית הוא תחום מתועד היטב באינטרנט. ויקיפדיה, יו-טיוב, וגוגל מכילים הסברים מצוינים על כמעט כל תחום בקורס, ואנו ממליצים בחום להיעזר בהם בשעת הצורך.

<u>הערות אנגלית</u>

כל המונחים בטקסט מצוינים בעברית (למעט מונחים אשר גם בעברית, השימוש הרווח שלהם הוא באנגלית). זאת אך ורק מפני שכך נהוג בלימוד הקורס באוניברסיטה העברית. אנו ממליצים לכל סטודנט להכיר גם את המונחים באנגלית, אשר מהווים הבסיס לדיון אקדמי רציני, בין-לאומי.

תוכן עניינים

23) משפט: קבוצת וקטורים במ"ו, $v_1, v_2, ... v_n \in V$ הם בסיס אמ"ם לכל $v \in V$ קיימת הצגה יחידה כך ש- $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$.

24) משפט: בכל קבוצה פורסת יש תת-קבוצה שהיא בסיס.

25) משפט: אם $V = sp\left(v_1, ..., v_n\right)$ וקיימים $w_1, ..., w_m \in V$ בת"ל אז ניתן להשלים את $w_1, ..., w_m$ עד לבסיס של V, כאשר נשתמש לצורך כך רק באיברים (=וקטורים) מתוך הקבוצה $\left\{v_1, ..., v_n\right\}$

26) משפט: נניח שמ"ו V נוצר-סופית, וש- $U \subseteq V$ תת-מרחב, אז U נוצר סופית.

27) משפט: אם $V = Sp(v_1, v_2, ... v_n)$, $U \subseteq V$ תתמ"ו, $u_1, u_2, ... u_n \in \mathrm{U}$ בלתי-תלויים ליניארית, אזי $U = V$

28) משפט: אם $V = Sp(v_1, v_2, ... v_n)$, $U \subseteq V$, אזי $\dim_f U \le \dim_f V$

29) משפט המימדים הראשון: אם $V = Sp(v_1, v_2, ... v_n)$, ו-U, W תתי מרחבים, אזי
$$\dim_f (U + W) = dim_f (U) + dim_f (W) - dim_f (U \cap \mathrm{W})$$

30) משפט: נניח V,U מ"ו מעל F, $u_1, ... u_n \in U$ בסיס ל-U, $w_1, ... w_n \in V$ וקטורים כלשהם ב-V (לאו דווקא בסיס), אזי קיימת **העתקה ליניארית יחידה,** $f : U \to V$, כך ש
$$\begin{aligned} &f(u_1) = w_1, \\ &f(u_2) = w_2, \\ &... \\ &f(u_n) = w_n \end{aligned}$$

31) טענה: $f : U \to V$ היא 'על' אמ"מ $\mathrm{Im}\, f = V$, וכן f היא חח"ע אמ"מ $\ker(f) = \{0_U\}$

32) משפט: אם $U = Sp(u_1, u_2, ... u_n)$, $f : U \to V$ העתקה ליניארית, אז
$$\mathrm{Im}\, f = Sp(f(u_1), f(u_2) ... f(u_n))$$

33) משפט המימדים השני: אם $U = Sp(u_1, u_2, ... u_n)$, $f : U \to V$ העתקה ליניארית. אז
$$\dim_f \ker(f) + \dim_f \mathrm{Im}(f) = \dim_f U$$

34) משפט: $m : Hom(U, V) \to M_{m,n}(F)$ המוגדרת ע"י $m : f \mapsto [f]_{v_1 ... v_m}^{u_1 ... u_m}$ היא ה"ל חח"ע ועל, כלומר איזומורפיזם של מ"ו.

35) טענה: $\dim_f M_{m,n} = mn$

36) טענה: אם $f : Y \to W$ איזומורפיזם של מרחבים וקטורים מעל F אז $\dim_f Y = dim_f W$ (במידה והמימד שלהם מוגדר)

37) טענה: אם $f: Y \to W$ איזומורפיזם בין מ"ו, אזי גם $f^{-1}: W \to Y$ גם הוא איזומורפיזם של מרחבים וקטורים.

38) טענה: למרחב העתקות בין 2 מרחבים וקטורים כלשהם (V,U) יש בסיס.

39) משפט: נניח ש- $f: U \to V$ העתקה ליניארית, $c_o \in U, b \in V$, $f(c_o) = b$ אזי
$$f^{-1}(b) = c_o + \ker f$$

40) משפט: יהיו $U_1, U_2 \subseteq V$ תתי-מרחבים, $v_1, v_2 \in V$ וקטורים, אזי אם $v_1 + U_1 = v_2 + U_2$ אז
$$U_1 = U_2$$

41) משפט: תהי $f_A: F^n \to F^m$ העתקה ליניארית אשר מיוצגת בבסיס מסוים ע"י מטריצה A. אזי,
$$\operatorname{Im} f_A = Sp(columns / of / A)$$

42) משפט: לכל מטריצה A, $rank_c(A) = rank_r(A)$

43) למערכת משוואות יש פיתרון אמ"מ דרגת המטריצה המייצגת אותה עם עמודת האיברים החופשיים שווה לדרגת המטריצה המייצגת אותה ללא עמודת האיברים החופשיים

44) תכונה 1 של דטרמיננטות - טענה:
$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ c * a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = c * \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

45) תכונה 2 של דטרמיננטות - טענה:
$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} + a_i{}'_* \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i'*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

46) תכונה 3 של דטרמיננטות - טענה: אם יש למטריצה A שתי שורות זהות, אזי $\det(A) = 0$

47) תכונה 4 של דטרמיננטות - טענה: $\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

48) אם A, B שתי מטריצות מאותו הסדר (אותו הגודל), אזי $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

49) משפט: אם השורות של מטריצה A הן ת"ל, אז $\det(A) = 0$

50) משפט: אם העמודות/שורות של מטריצה A בת"ל, אזי $\det(A) \neq 0_F$

51) משפט: עבור מטריצה A ריבועית מסדר n*n, $\det(A^t) = \det(A)$

52) משפט: הדטרמיננטה של מטריצה משולשית הוא מכפלת איברי האלכסון

53) משפט: דטרמיננטת מטריצת בלוקים משולשים בלוקית היא מכפלת דטרמיננטות הבלוקים

54) נוסחת פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ועמודה

55) סיכום

1) הגדרת השדה

אנו מגדירים **שדה** כקבוצה של איברים אשר עליהם מוגדרות פעולת חיבור (+) ופעולת כפל (*), אשר יחד מקיימים את רשימת ה**אקסיומות של שדה**. הסימון ל'שדה' הוא בדרך-כלל עם האות F (או $\mathbb{F}$). לשדות ספיציפים מסוימים קיים סימון מסוים, לרוב אות גדולה אחרת אשר מסמנת את השדה הספיציפי.

להלן מובאת רשימת האקסיומות, שמילוי שלהן מגדיר קבוצה כשדה:

<u>אקסיומות החיבור</u>

1. <u>קשירות</u> (<u>סגירות</u>) – לכל שני איברים בשדה (סקלארים) $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיים כ $a+b\in\mathbb{F}$ (כלומר תוצאת החיבור שייכת גם היא לשדה). כמו כן, ביטוי זה מוגדר באופן חד-ערכי (כלומר a+b שווה ל-c יחיד וקבוע).
2. <u>קומוטטיביות</u> <u>(חילופיות)</u> – לכל שני סקלארים (איברים בשדה) $a,b\in\mathbb{F}$, b+a = a+b .
3. <u>אסוציאטיביות (קיבוציות)</u> – לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$, a+(b+c) = (a+b)+c.
4. <u>קיום איבר ניטרלי לחיבור ("איבר האפס")</u> – קיום איבר "0" בשדה כך שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים a+0 = a.
5. <u>קיום איבר נגדי</u> – לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים איבר a–, כך שמתקיים a+ (-a) = 0. (כלומר לכל איבר בשדה קיים נגדי, כך שחיבור איבר לנגדי שלו, מחזיר את אפס השדה).

<u>אקסיומות הכפל</u>

1. <u>קשירות</u> (<u>סגירות</u>) – לכל שני סקלארים $a,b\in\mathbb{F}$ הביטוי a*b מוגדר באופן חד-ערכי, וגם מתקיים $a*b\in\mathbb{F}$.
2. <u>קומוטטיביות</u> <u>(חילופיות)</u> – לכל שני סקלארים $a,b\in\mathbb{F}$, a*b = b*a .
3. <u>אסוציאטיביות (קיבוציות)</u> – לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$, a*(b*c) = (a*b)*c
4. <u>קיום איבר ניטרלי לכפל ("איבר היחידה")</u> – קיום איבר "1" בשדה כך שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים a*1 = a.
5. <u>קיום איבר הופכי:</u> לכל $a\in\mathbb{F}$ (חוץ מלאיבר האפס) קיים איבר a^{-1}, כך שמתקיים $a*a^{-1}=1$. (כלומר לכל איבר פרט לאפס קיים הופכי, כך שכפל איבר בהופכי שלו, מחזיר את אחד השדה).[1]

---

[1] נגדיר בהזדמנות זאת גם את 'קו החלוקה' אשר הוא הסימון המוכר לנו, ומכאן $(\frac{1}{a})$ יהיה שקול לסימון a^{-1}. כפי שאמרנו, לאיבר האפס אין הופכי, ואכן כפי שבוודאי ידוע לכם, לסימון $(\frac{1}{0})$ אין משמעות.

אקסיומות משותפות לחיבור ולכפל

1. דיסטריביוטיביות (פילוג) – לכל $a,b,c \in \mathbb{F}$ מתקיים: a*(b+c) = a*b+a*c.
2. איבר היחידה שונה מאיבר האפס: $1 \neq 0$.[2]

כאמור, כל קבוצת איברים המקיימת את החוקים הנ"ל, תיקרא **שדה**. משום כך קיים המונח 'סקלאר', אשר משמעותו 'איבר בשדה', במקום המונח המוכר 'מספר' – שכן, שדה יכול להכיל אובייקטים אשר אינם דווקא מספרים. רק צריך שעל האובייקטים יהיו מוגדרות פעולות החיבור והכפל המוגדרות לעיל, ושיקיימו את האקסיומות לעיל.

להלן מספר דוגמאות לשדות:

נשים לב כי Q, קבוצת המספרים הרציונליים (כלומר, מספרים כמו $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, ..., \frac{3,089}{2,564}$) הוא שדה.

וכך גם $\mathbb{R}$, קבוצת המספרים הממשיים: (לדוגמא, מספרים כמו $3.34564235, \sqrt{2}, \pi, ...$)

גם $\mathbb{C}$, קבוצת המספרים המרוכבים (לדוגמא 2+3i, 5+7i) הוא שדה.

דוגמא יותר 'מתוחכמת' לשדה תהא קבוצת $Q\sqrt{2}$, אשר איבריה הם כל $a+b\sqrt{2}$, כאשר $a,b \in Q$.
(כלומר, איברים כמו $1+3*\sqrt{2}$, $4+2*\sqrt{2}$, $5+12.5*\sqrt{2}$, וכו'. כדי להוכיח שקבוצה זו היא שדה, יש לבדוק שאיבריה מקיימים את האקסיומות של השדה.

מעתה והלאה, אנו נוכיח משפטים על שדה באופן כללי - כלומר, נוכיח שאם קבוצה מסוימת היא שדה, אז חוק מסוים מתקיים לגביה. זאת במקום להוכיח את המשפט עבור כל שדה בנפרד: כיוון שהמשפטים שנוכיח יהיו תלויים רק באקסיומות של שדה, אנו נדע שכל קבוצה שתקיים את האקסיומות הנ"ל, אזי המשפטים שיוכחו לגבי 'שדה כללי' יתקיימו גם לגביה.

[2] אפשר להסתדר גם בלי האקסיומה הזו. אם 0 = 1 אז פשוט מדובר בשדה שיש בו רק איבר אחד, ושמו 1 (וגם 0, כי 1 = 0). כל האקסיומות אכן תתקיימנה, אבל זה לא מקרה מעניין במיוחד, ולכן אנחנו לא מתעסקים בו.

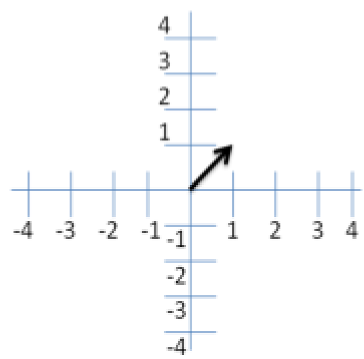
2) הצגת מספרים מרוכבים במישור

רובכם מכירים את "המספרים המרוכבים", המיוצגים ע"י השדה $\mathbb{C}$, דרך הייצוג a+bi – למשל, 1+2i, 4i, וכו'. אנו נראה כעת דרך נוספת להצגת מספרים מרוכבים, בשיטה המכונה "הצגת מספרים מרוכבים במישור".

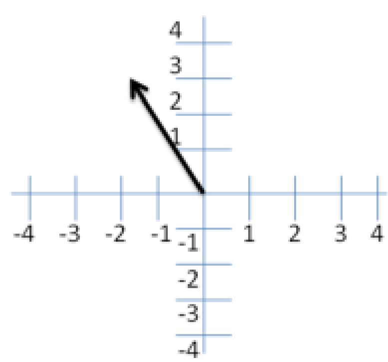
מספרים מרוכבים מיוצגים, כידוע, ע"י שני מספרים – נכנה את שני מספרים אלו a ו-b – אשר מייצגים את <u>החלק ממשי</u> (a) ואת <u>החלק המדומה</u> (b), כך שהייצוג הכולל נראה מסוג a+b*i.

כעת, משאנו רואים כל מספר כבעל שתי קואורדינאטות (a ו-b), אנו יכולים להציג אותו כנקודה במישור, כאשר a תהיה ערך ציר ה-x, אשר ייצג את החלק הממשי, ואילו b יהווה את ציר ה-y, אשר ייצג את החלק המדומה. (כשאנו אומרים 'המישור', כרגע מדובר באותו מישור אוקלידי המוכר לנו מהתיכון לבינתיים נשתמש בו בצורה האינטואיבית המוכרת לנו כבר). הכי קל יהיה להדגים.

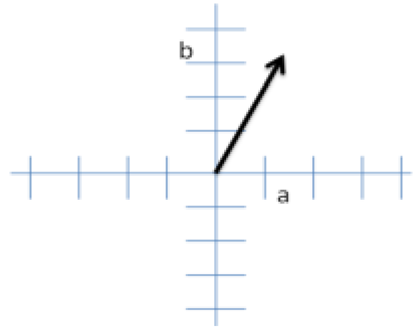
נתבונן בתצוגה במישור של המספר המרוכב 1+i. נשים לב שערך ה"a" במקרה זה הוא 1, וערכו של b (החלק מהדומה) הוא 1. אנו נתייחס במישור לנקודה (1,1), ומכאן תצוגתו במישור של 1+i תיראה כך:



כפי שאפשר לראות, החץ מצביע אל (1,1). תצוגה במישור של המספר -2+3i (גם הוא מספר מרוכב) הייתה נראית כך:

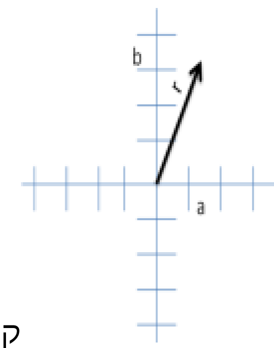


ולבסוף נתבונן בתצוגה של איבר מרוכב כללי a+bi במישור:

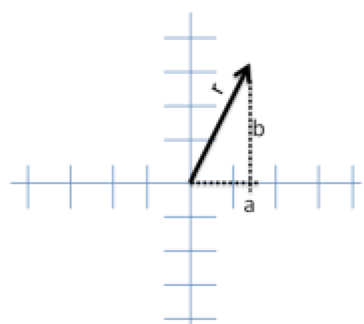


כפי שאמרנו, ערך a מייצג את הערך "בציר x" שמייצג את החלק הממשי, ווהערך בציר y, הוא המספר b, מייצג את החלק המדומה.

כאשר אנו מציגים תצוגה כזו, אנו יכולים להתבונן במספר מרוכב כעל "חץ" שכזה – וברור שיש התאמה חח"ע ועל בין 'חץ' בתצוגה שכזו לבין מספר מרוכב. מכאן, אנו יכולים להגדיר מושגים חדשים לגבי כל מספר מרוכב, דרך אותו החץ. לדוגמא, נגדיר את ה'גודל' של מספר מרוכב, אשר ייוצג גם כ"ערך המוחלט" של מספר מרוכב. גודל זה יהיה <u>אורכו של החץ</u> המייצג את המספר המרוכב במישור, ונסמנו באות r:

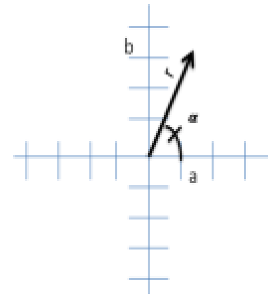


קל לראות ממשפט פיתגורס כי $r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$:



נסמן מכאן את ערכו המוחלט של מספר מרוכב |r = |a+bi.

נראה גם כי לכל 'חץ' שכזה (כלומר לכל מספר מרוכב בתצוגתו במישור) יש <u>זווית</u> משלו – נסמנו ב-α :



נשים לב כעת שאפשר להסתכל על a בתור $r*\cos\alpha$ ועל b בתור $r*\sin\alpha$,
ומכאן $\underline{a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$

תצוגה זו של מספרים מרוכבים, כאמור, מתאימה באופן חח"ע בין 'חץ' במישור עם גודל וכיוון מסוימים לבין תצוגת a+bi קבועה. תצוגה זו תאפשר לנו לייצג מספרים מרוכבים בצורה מאוד נוחה בעתיד.

3) מודולו – שארית

פעולת ה'מודולו' מייצגת חילוק עם שארית, ובפרט – את השארית מחילוק עם שארית.

פעולה זו היא אינטואיטיבית ב-Z, שדה המספרים השלמים. אנו נסמן 10 mod 3 = 1, למשל – שארית החלוקה של 10 ב-3 היא 1. (10=3*3**+1**). באופן כללי, עבור מספרים שלמים המקיימים m=q*n+r (כאשר r קטן מ-n ואי-שלילי), r הוא השארית של חילוק m ב-n.

דוגמאות נוספות ב-Z:

5 mod 3 = 2

5 mod 4 = 1

5 mod 5 = 0

1,902 mod 1,900 = 2

1,902 mod 1,902 = 0

550 mod 55 =0

[3]120 mod 11 = 10

וכן הלאה.

נציין בהקשר זה כי קיימים שדות אשר מכונים "שדות מודולו X", כאשר X הוא מספר האיברים בשדה. נביא מספר דוגמאות לשדות אלו:

השדה $\mathbb{Z}_2$ הוא השדה הכולל רק את האיברים 1 ו-0, וכפל וחיבור בו מוגדרים מודולו 2. כלומר, בשדה זה, להגיד a+b שקול ללהגיד (מעל Z הרגיל) a+b mod 2. לדוגמא, 1+1 = 0, כי 1+1 mod 2 = 0.

נראה כי מעל השלמים, 1+0 mod 2 = 1 ולכן מעל $\mathbb{Z}_2$, 1 = 1+0. כך גם כפל: 1*0 = 0, 1*1 = 1 – וזאת כיוון ש1*0 mod 2 = 0, 1*1 mod 2 = 1.

קיימים גם $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, ועוד, כאשר כל שדה מכונה 'השדה מודולו 5', 'השדה מודולו 7', וכו'. מעניין לציין כי רק מספרים ראשוניים יכולים לקיים תכונה זו, כלומר לא ייתכן 'שדה מודולו 8', למשל. (טיעון זה לא יוכח כאן[4].)

[3] נציג כאן סימון מתמטי שאולי יהיה חדש עבורכם – 'שיוויון זהותי', אשר מסומן כמו שיוויון ("=") אבל עם שלושה קווים: $\equiv$. משמעותו דומה לשיוויון רגיל, אבל הוא 'יותר חזק' – הוא מציין שלא רק שיש שיוויון כרגע בין שני הצדדים, אלא יש ממש שיוויון זהותי בין הצדדים, כלומר הם זהים לגמרי. לא נעמיק בסוגיה זו פה, רק חשוב שתדעו לזהות את הסימון הזה אם תראו אותו במקומות אחרים. בנוסף נעיר שלעיתים כותבים את mod x עם סוגריים, כלומר $5(\mathrm{mod}\,3) \equiv 2$

[4] לא נוכיח לעומק, אבל כאינטואיציה, חשבו על כך שבשדה כזה מכפלתם של 2 ושל 4 נותנת 0. לכן לא ייתכן של 2 יש הופכי - כי אז היינו מכפילים 4 כפול 2 כפול ההופכי של 2, ומקבלים 4, בעוד שבעצם מקבלים 0. אם הצלחתם לעקוב מצוין, אם לא, לא נורא.

כמו כן נתבונן בעובדה המעניינת הבאה. נסתכל על $\mathbb{Z}_5$, המורכב מהאיברים 0, 1, 2, 3, 4. החיבור והכפל בו מוגדרים כחיבור וכפל מודולו חמש מעל Z. נתבונן ב-1 השדה: $1_{\mathbb{Z}_5}$, ונחבר אותו לעצמו:

$1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} = 1 + 1 \bmod 5 = 2$

כעת נחבר אותו לעצמו 3 פעמים:

$1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} = 1 + 1 + 1 \bmod 5 = 3$ (כזכור ' 5mod' בסוף אומר שאנו לוקחים את כל התוצאה עד כה ובודקים את תוצאת השארית שלה בחלוקה ל-5. במקרה זה, השארית של חלוקת 3 בחמש היא 3)

נמשיך:

$1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} = 1 + 1 + 1 + 1 \bmod 5 = 4$

אבל כעת, מה יקרה אם נוסיף חמש פעמים את אחד השדה לעצמו?

$1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} + 1_{\mathbb{Z}_5} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \bmod 5 = 5 \bmod 5 = 0$

ראינו שאם הוספנו את אחד השדה לעצמו 5 פעמים, הגענו חזרה לאפס! בשדה כזה, המספר "5" שקול בעצם ל-0. 6 שקול ל-1, 32 שקול ל-2, וכן הלאה – כל מספר שקול לעצמו-מוד-5 (כלומר, שארית חלוקתו בחמש).

עובדה זו מביאה אותנו למושג הבא: מציין השדה.

4) מציין של שדה

יהי F שדה. נסתכל על 1_F - איבר היחידה של השדה, אותו האיבר שכפל בו אינו משנה את הנכפל. כעת נסתכל בסדרת האיברים:

$1_F + 1_F$

$1_F + 1_F + 1_F$

$1_F + 1_F + 1_F + 1_F$

...

$1_F + 1_F + 1_F + ... + 1_F$ (n פעמים)

האם אחד מאיברים האלה שווה לאפס? האם חיבור של 1 השדה לעצמו, n פעמים, מחזיר אפס? אם כן, נאמר שהמספר הזה – n – הוא 'מציין' השדה (באנגלית, ה-characteristic של השדה, או בקיצור char F). אם אין מספר כזה n, שחיבור אחד השדה לעצמו n פעמים (כאשר n גדול מאפס, כמובן) מחזיר אפס, אזי נאמר שמציין השדה הוא אפס.

נבהיר ש-n הוא המספר המינימלי של פעמים שצריך להוסיף את 1 השדה לעצמו כדי להגיע לאפס. (שהרי ברור שגם כל כפולה של n תהיה מספר שמקיים את תכונה זו, אבל אנו מתעניינים במינימלי.)

נשים לב כי בשדה הממשיים המוכר לנו, מציין השדה הוא אפס, כי כמובן ש-1+1+1....+1 לא שווה לאפס.

מצד שני, נשים לב שלדוגמא בשדה $\mathbb{Z}_2$ (השדה מודולו 2), הכולל רק את האיברים 1 ו-0, ידוע לנו כי 1+1=0, ומכאן המציין של שדה זה הוא 2. באותו האופן, לכל שדות המודולו, מציין השדה הוא גודל המודולו:

$\text{char}\,\mathbb{Z}_5 = 5$

בשדה הממשיים לעומת זאת, למשל, אין דרך להוסיף את אחד השדה לעצמו ולקבל אפס, ולכן

char Q = 0

הגענו כעת לנושא מספר אחת של אלגברה ליניארית 1. הנושא הבא, מרחבים וקטוריים, הוא הנושא החשוב והמרכזי ביותר באלגברה ליניארית, וכל מה שנעשה מעתה יתבסס על הבנה של נושא זה. אין צורך (ואף קשה מאוד) להבין אותו במלואו מיידית, אך ראוי להבהיר את החשיבות שלו. מרבית קורס זה מטרתו להקנות – דרך משפטים, טענות והוכחות – הבנה של המושג הערטילאי של מרחבים וקטורים. אנו מתעכבים על נקודה זו כדי להבהיר שמטרת המשפטים וההוכחות הרבים שיובאו בהמשך הינה ללמד, לאט לאט, להבין את המושג המורכב הזה. כיוון שאנו נלמד מושגים רבים שנשענים זה על זה, יש צורך לחזור ולקרוא את כל החומר יותר מפעם אחת, כדי להבין את הקשר בין המושגים השונים.

אם כן, נתחיל בהגדרה הפורמלית:

יהי F שדה. V מוגדר להיות <u>מרחב וקטורי מעל שדה F</u> כאשר V הוא <u>קבוצה שמוגדרת בה פעולות של חיבור ("+") וכפל בסקלר, כך שמתקיימות בה האקסיומות של מרחב וקטורי</u>.

כל קבוצה אשר מוגדרות בה פעולות חיבור בתוך עצמה ומוגדרות בה פעולות כפל בסקלר (כאשר 'סקלר', כוונתו איבר בשדה F), וכן פעולות אלו מקיימות את האקסיומות הבאות, הינה מרחב וקטורי. כלומר, ניתן לחבר שני איברים בתוך V, וניתן לכפול איבר מ-F באיבר ב-V.

האקסיומות הן:

<u>חיבור</u> (של שני 'וקטורים')

1. קשירות ("סגירות") : לכל $u,v\in V$[5] מתקיים כי $u+v\in V$.
2. קומוטטיביות ("חילוף"): לכל $a,b\in V$ מתקיים כי $u+v=v+u$.
3. אסוציאטיביות ("שינוי סדר סוגריים") : לכל $u,v,w\in V$ מתקיים כי $u+(v+w)=(u+v)+w$.
4. קיום איבר 0 (שחיבור אליו ניטרלי ולא משפיע): קיים איבר 0_V, כך שלכל $u\in V$ מתקיים כי $u+0_V=u$.
5. קיום איבר נגדי לכל איבר (שחיבור אליו מחזיר 0): לכל $u\in V$ קיים איבר אשר נסמנו $-u$ ומתקיים כי $u+(-u)=V$.

<u>כפל בסקלר</u> (כפל של סקלר, כלומר איבר מהשדה, בוקטור. כפל בין וקטורים איננו מוגדר בשלב זה.)

1. קשירות: לכל $u\in V, a\in F$, מתקיים כי $a*u\in V$.

[5] נזכיר כאן כי הסימון $u\in V$ אומר "u <u>שייך</u> ל-V". מכאן, הביטוי " לכל $u\in V$ " משמעותו "כל איבר ב-V, ונכנה איבר זה u".

2. קיום איבר "1 השדה" שניטרלי לכפל: כפל של וקטור מהמרחב הוקטורי ב-1 השדה, מחזיר את אותו הוקטור. כלומר קיים 1_F כך שלכל $u \in V$ מתקיים $1_F * u = u$.

3. אסוציאטיביות כפל בסקלרים: לכל $a,b \in F, u,v \in V$ מתקיים : (a*b)*v = a*(b*v)

[a, b סקלרים – כלומר איברים מהשדה – ו-v איבר מהמרחב הוקטורי, כלומר וקטור).

4. פילוג כפל בסקלרים: לכל $a,b \in F, u,v \in V$ מתקיים :

a. (a+b)*v = a*v + b*v

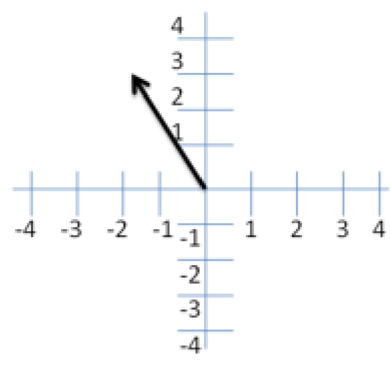
b. a(v+u) = a*v+a*u

נבהיר שאקסיומות החיבור נוגעות לחיבור של וקטור א' עם וקטור ב' (אשר שניהם שייכים למרחב הוקטורי); אקסיומות הכפל נוגעות לכפל של וקטור א' (מהמרחב הוקטורי) בסקלאר (איבר מהשדה שהמרחב הוקטורי הוא מעליו). בכלל, כפל בין וקטורים איננו מוגדר בשלב זה של העיסוק בחומר ואנו מתעלמים ממנו לחלוטין.

[הערה: נהוג בספרות לציין כפל של סקלר בוקטור ללא סימן המכפלה, אלא רק בצמידות האותיות. עם זאת, לצורך בהירות הקריאה ולמרות שאין זה תמיד מקובל לגמרי, אנו לעיתים קרובות נכתוב a*v כמציין כפל של הסקלר a בוקטור v]

אם כן, זוהי ההגדרה הפורמלית למרחב וקטורי. מעתה ועד עולם אנו נישען על הגדרה זו בלבד.

ראוי לציין כי בשלב זה, סיכוי סביר כי המילה 'וקטורים' מזכירה לכם 'חצים' כגון:



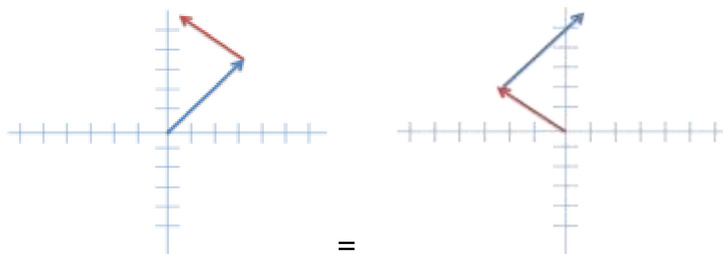
דברים כאלו מלומדים לעיתים קרובות בתיכונים במסגרת חמש יחידות מתמטיקה. נבהיר כי אובייקטים אלו המוכרים לכם אינטואיטיבית <u>אכן הינם וקטורים</u>, והמישור בו הם נמצאים ("הלוח", או "מערכת הצירים x-y", כפי שהם מכונים בתיכונים) אכן הינו דוגמא <u>למרחב וקטורי</u>. זאת בגלל שהוא מקיים את ההגדרות של מרחב וקטורי שראינו לעיל. עם זאת, הוא רק <u>דוגמא אחת למרחב וקטורי</u>, וכמוהו קיימים רבים אחרים (אינסוף, למעשה). למרחב וקטורי זה יש שם: $\mathbb{R}^2$ (מבוטא

"אַר-שתיים), שכן זהו ציר דו-מימדי (מושג אשר נבהיר בהמשך) כאשר כל מימד (כל ציר) הינו של הממשיים, $\mathbb{R}$.

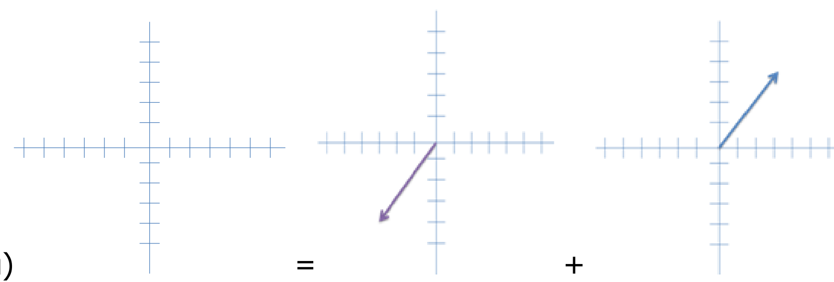
נבהיר: אנו עוסקים במרחבים וקטוריים <u>כלליים</u>, כלומר <u>לא רק</u> $\mathbb{R}^2$. מן הסתם, ייתכן גם $\mathbb{R}^3$, וכך גם $\mathbb{R}^{52}$. כמו כן, ישנם מרחבים וקטוריים אחרים אשר בכלל לא דומים ל-$\mathbb{R}^n$.

וכעת נקודה עדינה: כל הדברים שנלמד יהיו תקפים לכל מרחב וקטורי באשר הוא. עם זאת, נרבה לתת דוגמאות מתוך $\mathbb{R}^2$, שכן הוא מוכר לנו ונוח להדגים עליו דברים. נדגיש: הדברים שנוכיח תקפים לכל מרחב וקטורי, ולכן בפרט למרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$ שעליו נדגים.

לא נוכיח כאן באופן מלא ש-$\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי, אך מוכיחים זאת בדומה להוכחה שקבוצה היא שדה: עוברים ורואים שכל אקסיומה מתקיימת. נראה לדוגמא כי ב-$\mathbb{R}^2$ מתקיימת אקסיומת החילוף בחיבור:



ונראה את קיום האיבר הנגדי:



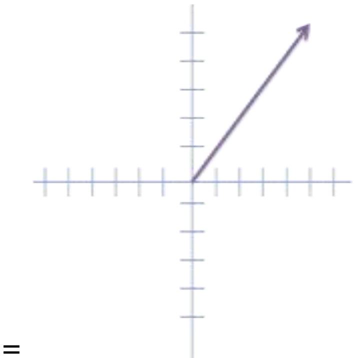
(וקטור האפס!)

כמו כן נדגים את המשמעות של כפל של סקלר (איבר מהשדה) בוקטור (איבר מהמרחב הוקטורי). במקרה של $\mathbb{R}^2$, 'סקלר' יהיה איבר מ-R (למשל, 3, או 15, או 2.23452354) ו-וקטור יהיה איבר מהמרחב הוקטורי. כך לדוגמא אם יהיה לנו:

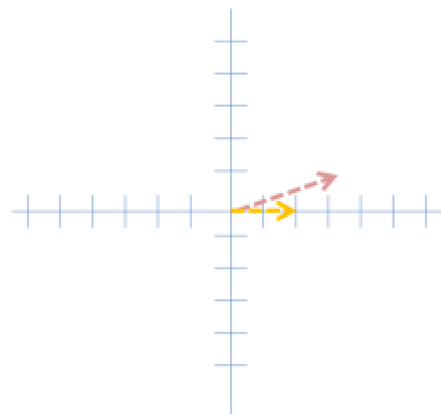
v = 

$a = 2.5$,

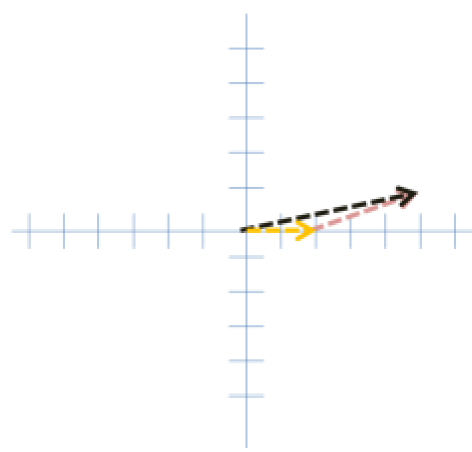
אזי

$a*v =$ 

כעת נתבונן ב<u>חיבור</u> של שני וקטורים. נניח ויש לנו את $a=(3,1)$ (בורוד) ואת $b=(2,0)$ (בצהוב):



החיבור שלהם, $a+b$, יהיה בדיוק חיבור החצים, לפי הכלל המכונה 'כלל המקבילית', ומיוצג להלן בחץ השחור:



נשים לב כי הקורדינטות של החץ השחור, $a+b$, הינן $(5,1)$ – כלומר 5 "בציר x" ו-1 "בציר y" (כך בציור). החיבור במרחב הוקטורי של $\mathbb{R}^2$ הוא "קואורדינאטה-קואורדינטה". כלומר: אם נתונים

$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ ו- $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, אז $a+b=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$. אנו גם רואים פה כי לעיתים רושמים את הקואורדינאטות "שוכבות" בשורה ולעיתים "עומדות" בטור, והמשמעות זהה.

נדגיש כאן כי ל<u>חיבור</u> של סקלר לוקטור אין משמעות (מה זה v ועוד 2? אין לזה משמעות) וכן אין משמעות לכפל של שני וקטורים (בשלב זה; בקורסים אחרים תלמדו כיצד לכפול שני וקטורים).

ניתן עוד דוגמא, ובה נמחיש את אקסיומת החילוף בחיבור. נניח שיש לנו (עדיין ב- $\mathbb{R}^2$) וקטור v1=(1,4) ו-וקטור v2=(3,0), כאשר החיבור בין הוקטורים מוגדר כחיבור קואורדינאטה-קואורדינטה.

ראשית נראה כי

v1+v2 = (1,4)+(3,0) = (1+3,4+0)

כעת, "1+3" הוא ביטוי <u>בשדה</u>. ובשדה אנו יודעים שיש לנו חילוף על חיבור, כלומר ביטוי זה שקול ל-"3+1". כך גם לגבי 0+4=4+0, כלומר:

(1+3,4+0)=(3+1,0+4)

כעת ניקח 'צעד אחורה', ו'נפתח' את הביטוי ל:

(3+1,0+4)=(3,0)+(1,4)

(ודאו כי אתם מבינים מדוע)

ומכאן,

(3,0)+(1.4) = v2+v1

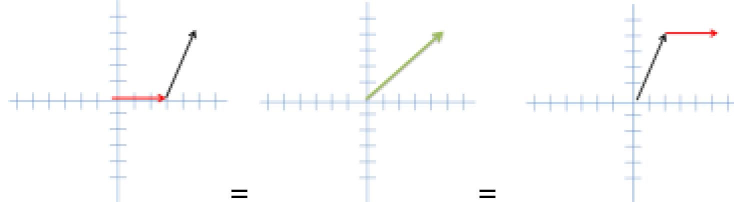
(לפי איך שהגדרנו את v2,v1)

ואם נציג הכל ביחד, נראה זאת כ:

v1+v2 = (1,4)+(3,0) = (1+3,4+0) = (3+1,0+4) = (3,0)+(1,4) = v2 + v1

וכך הראנו כי v1+v2 = v2+v1 (כלומר, <u>אקסיומת החיבור במרחב הוקטורי מתקיימת</u>).

גרפית, כמובן, קל לנו לראות את בא לידי ביטוי – סדר החיבור של וקטורים ב- $\mathbb{R}^2$ לא משנה.



דוגמאות גרפיות אלו הן זאת ותו לא: הדגמות גרפיות כדי לעזור להבין. ברור שאינן הוכחות מתמטיות אמיתיות; מטרתן רק להדגים כי אנו כבר מכירים היטב מרחב וקטורי אחד ($\mathbb{R}^2$ כמרחב

וקטורי מעל הממשיים) ונוח לעבוד איתו כדי לקבל אינטואיציה לגבי מרחבים וקטורים ומשפטים לגביהם, כפי שנלמד בעתיד.

נציין כי וקטור האפס ב- $\mathbb{R}^2$ הוא וקטור ה"כלום" (בתצוגה גרפית, הוא היה נקודה בראשית הצירים). סקלר היחידה הוא כמובן איבר היחידה של שדה הממשיים, "1", וכמובן שכפל שלו בוקטור אינו משנה את הוקטור. חשוב להיות מסוגלים להוכיח (בקלות) את כל האקסיומות של מרחב וקטורי על $\mathbb{R}^2$.

6) תתי-מרחבים וקטורים

אחרי שהגדרנו מרחב וקטורי, נכיר כעת את ההגדרה לתתי-מרחבים:

יהי F שדה, ויהי V מרחב וקטורי מעל F. תת-קבוצה W ($W \subset V$) תיקרא "תת-מרחב" של V אם:

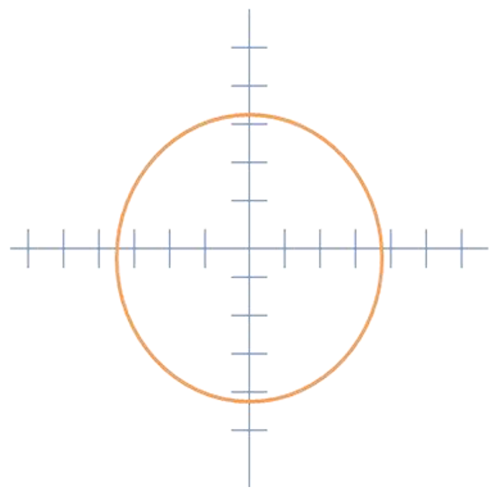
א. W לא ריקה ($W \neq \varnothing$)

ב. W סגורה לגבי חיבור (כלומר לכל $v_1, v_2 \in W$, אז $v_1 + v_2 \in W$)

ג. W סגורה לגבי כפל בסקלר (כלומר לכל $v \in W, c \in F$ אז $cv \in W$)

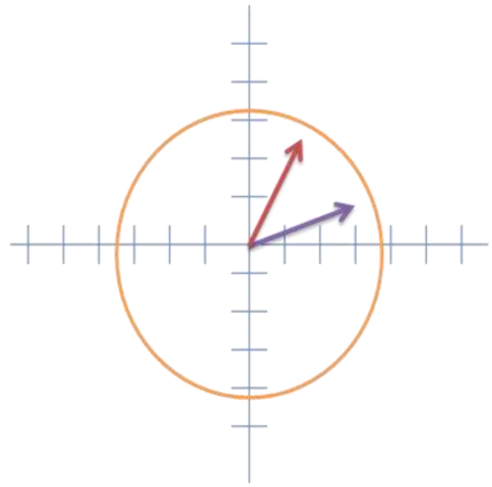
W למעשה מהווה מרחב וקטורי בפני עצמו מעל F, אך הוא מוכל במרחב וקטורי גדול יותר V, ולכן הוא 'תת-מרחב' של V.[6]

נתבונן במספר דוגמאות מעל $\mathbb{R}^2$. נתבונן למשל במעגל סביב ראשית הצירים:

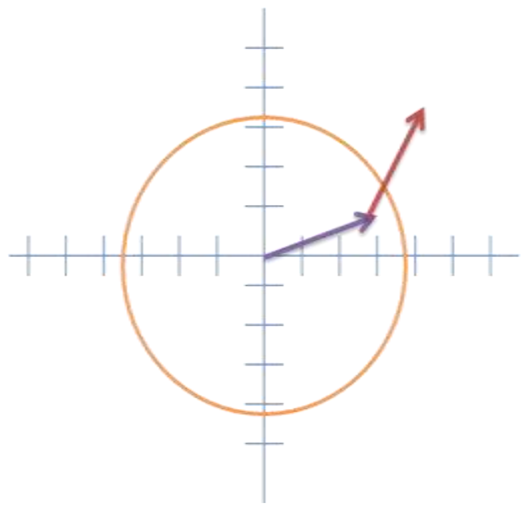


האם זהו תת-מרחב? לא. מדוע לא? כי למשל ניקח את הוקטורים u (סגול) ו-v (אדום):

[6] נשים לב שנוכל גם להגיד ש-V הוא ת"מ (תת-מרחב) וקטורי של עצמו. כל מרחב וקטורי הוא ת"מ וקטורי של עצמו.

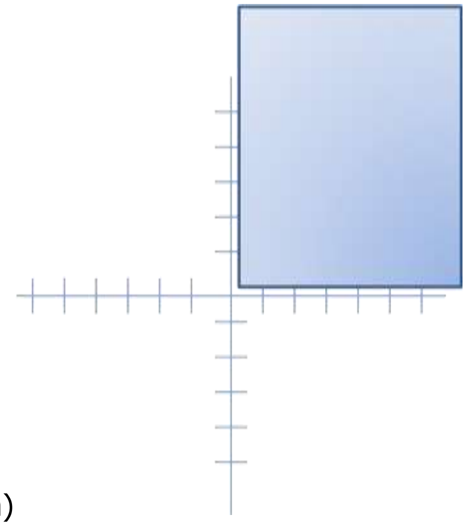


שניהם נמצאים ב-W, אך החיבור שלהם איננו:



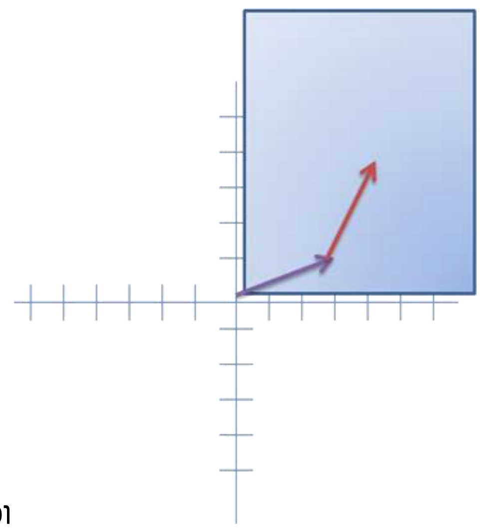
באופן דומה 'קל לראות' כי גם כפל של u ושל w בסקלר מהשדה (נניח ב-4, או ב-500, או במספרים רבים אחרים) אינו נשאר ב-W.

מה אם ניקח את כל הרביע הראשון? האם הוא יהיה תת-מרחב?

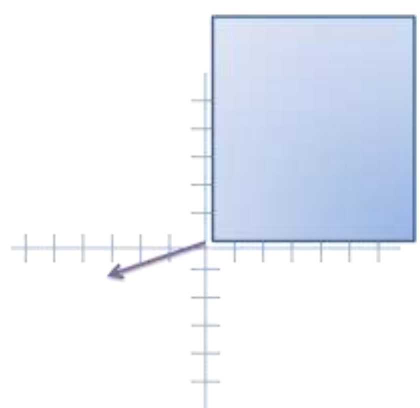


(הריבוע הכחול מסמן את W שלנו כעת, ונמשך עד אינסוף בשני הכיוונים החיוביים)

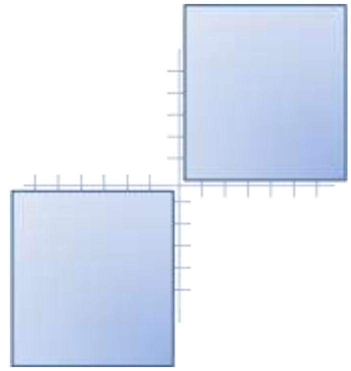
נראה כי אם ניקח את u ו-v מקודם, אז חיבור שלהם אכן נשאר ב-W:



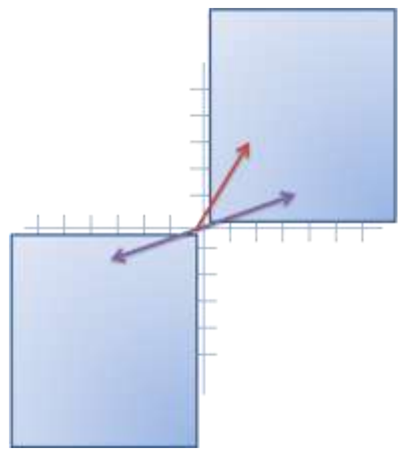
וכן אם נמשיך לחבר עוד ועוד פעמים את u ו-v עדיין נישאר ב-W. גם כפל בסקלר חיובי יישאר ב-W, אבל כפל בסקלר שלילי – לא. למשל, u כפול הסקלר 1- (מינוס 1), יחזיר:



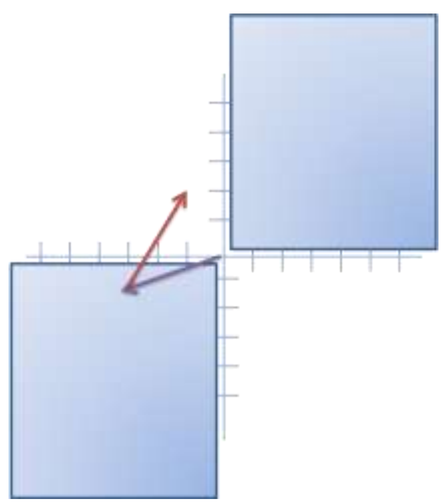
שאינו ב-W. אז גם הרביע הראשון אינו תת-מרחב. מה אם ניקח את הרביע הראשון והשלישי?



אז גם v וגם u ו-גם כפולות של סקלרים חיוביים ושליליים של u יהיו בתוך W:



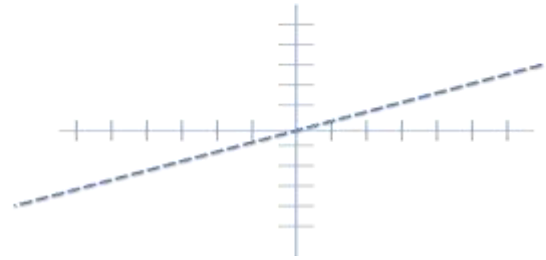
אך מה לגבי v+u–? הרי גם u– (שזה שקול ל: u*1-) וגם v נמצאים ב-W. אך נראה שהחיבור שלהם:



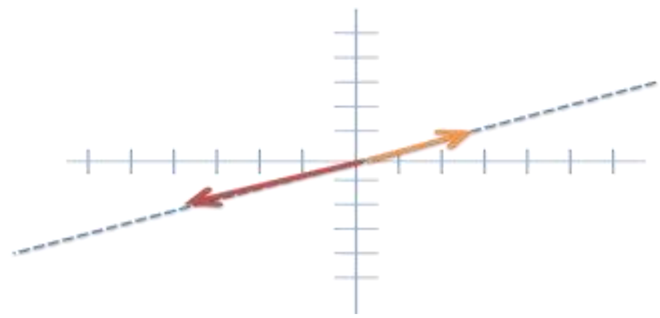
אינו נמצא ב-W. אם כן, לא כל כך קל למצוא תת-מרחב ב- $\mathbb{R}^2$. מה כן תת-מרחב ב- $\mathbb{R}^2$?

תת-מרחב ראשון יהיה "תת-המרחב הטריוויאלי", הכולל רק את וקטור האפס.

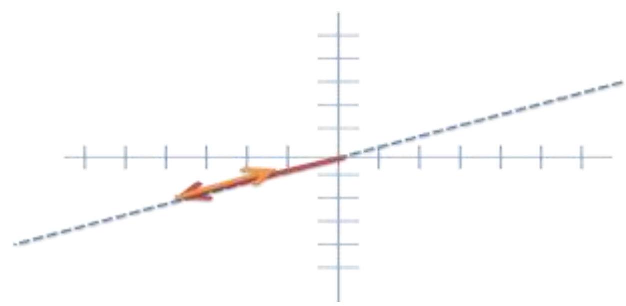
תת-מרחב מעניין יותר יהיה קו ישר שעובר דרך ראשית הצירים:



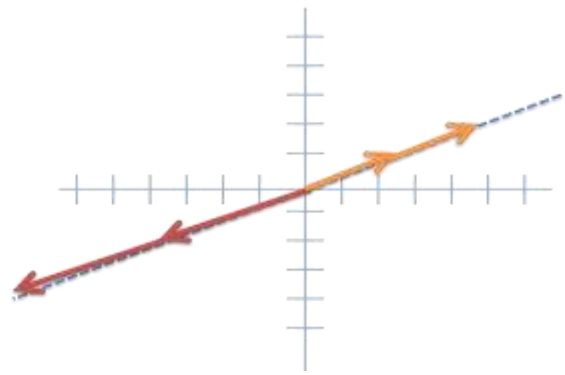
כאן הקו האלכסוני המקווקו הכחול הוא W שלנו. איזה וקטורים נמצאים על W? נסתכל על w1, w2 (אדום וכתום), שניהם וקטורים לדוגמא ב-W.



נראה כי החיבור שלהם גם נמצא על W:



וגם כפל של כל-אחד הם בסקלר נמצא על W:



וזאת נכונה לגבי כל וקטור ב-W: חיבור של שני וקטורים ב-W יהיה ב-W, וכפל של וקטור ב-W בסקלר (ב-R) יהיה ב-W. W גם אינו ריק (ראינו לעיל מס' דוגמאות לוקטורים עליו) והוא כמובן מוכל ב-V, ומכאן: W הוא תת-מרחב של V.

ראינו שכל קו ישר שעובר דרך ראשית הצירים הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^2$. מלבד קו ישר דרך הצירים, רק נקודת האפס והמרחב כולו הם תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^2$.

(נדגיש כי נקודת ה-O חייבת להיות מוכלת בכל מרחב וקטורי ובכל תת-מרחב וקטורי, וזו עוד דרך לראות שלא ייתכן שקו ישר שלא עובר דרך ראשית הצירים יהיה ת"מ. ההוכחה מתבססת על העובדה שאם W הוא מרחב וקטורי אזי הוא סגור לחיבור. כעת ניקח וקטור v בתוכו, ונסתכל על (-v)[7]+v, אשר ע"פ אקסיומות המרחב שייכים שניהם ל-W, וכמו-כן ע"פ אקסיומות המרחב, סכומם שווה ל-0)

[7] בשביל להוכחה לגמרי מתוך האקסיומות, יש להוכיח קודם כל כי $-1*v = -v$, כלומר 'מינוס אחד השדה' כפול כל איבר הוא הנגדי שלו. הוכחה זו נגזרת מאקסיומת הפילוג.

7) $Q\sqrt{2}$ כמרחב וקטורי

דנו ב- $\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי. כעת נציג מרחב וקטורי אחר, Q√2, אשר יותר מופשט, קשה יותר 'לצייר', ונותן דוגמא טובה לשימוש במונחים של מרחב וקטורי – ע'י האקסיומות – ולא רק ע'י 'ציור עם חצים'.

כזכור, כבר דנו ב-Q√2 כשדה. כעת אנו נתבונן באותה קבוצת האיברים Q√2 ונסתכל עליה כמרחב וקטורי מעל Q.

ראשית נזכיר כי Q√2 היא קבוצת האיברים a+b√2, כאשר a ו-b שייכים ל-Q. באופן פורמלי,

$$\mathbb{Q}\sqrt{2}=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

כלומר קבוצה זו כוללת:

(1+2*√2=) 1+2√2

$4\frac{1}{2}$ +32√2

4√2 = 0+4√2

5 = 5+0√2

וכו'.

גם קבוצה זו היא מרחב וקטורי מעל Q, כי היא מקיימת את האקסיומות. נבחר איברים כלליים בקבוצה a+b√2 ו-c+d√2 ונראה כי האקסיומות מתקיימות לגביהם (ואם הם מתקיימות לגבי איבר כללי, כמובן שהן מתקיימות לגבי כל איבר בקבוצה, ומכאן על הקבוצה כולה).

החיבור בתוך Q√2 מוגדר כך:

(a+b√2) + (c+d√2) = (a+b) + (c+d)√2

(זה אולי נראה מובן מאליו, אבל צריך לציין זאת במפורש)

ונגדיר כפל בסקלר, כלומר כפל של איבר בשדה Q בוקטור מתוך Q√2, באופן הבא:

אם a שייך ל-Q, אז :

a*(c+d√2) = (ac) + (ad) √2

לדוגמא, נראה כי אקסיומת הסגירות מתקיימת[8]: כאמור, (a+b√2) + (c+d√2) = (a+b) + (c+d)√2. ע"פ הסגירות ב-Q, אז a+b גם הוא איבר ב-Q וכך גם c+d, וכעת למעשה קיבלנו איבר שתצורתו עונה לתצורה החוקית של איברים ב-Q√2.

[8] קבוצה זו של Q√2 היא למעשה תת-קבוצה של הממשיים ($\mathbb{R}$) ולכן כל איבר ב-Q√2 הוא גם איבר ב- $\mathbb{R}$. מסיבה זו, כל האקסיומות של מרחב וקטורי, שמתקיימות ב- $\mathbb{R}$, יתקיימו גם ב- Q√2.

נבהיר: כאשר אנו מדברים על איבר מהמרחב הוקטורי, אנו מדברים על איבר מתצורת $a+b\sqrt{2}$.
כאשר אנו מדברים על סקלר, אנו מדברים על איבר מתוך Q, כלומר למשל 2 או $4\frac{1}{2}$. הגדרנו חיבור בין 2 וקטורים והגדרנו כפל של סקלר בוקטור וניתן להוכיח (ע'י כך שנראה שכל אקסיומה מתקיימת) כי מבנה זה של $Q\sqrt{2}$ הוא מרחב וקטורי.

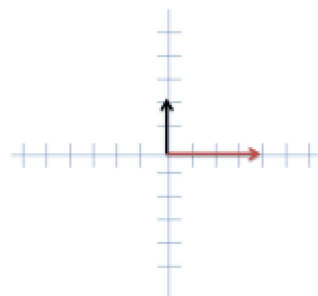
אם כן, הכרנו כעת מרחב וקטורי שפחות 'מובן מאליו' מאשר $\mathbb{R}^2$. זוהי דוגמא חשובה, אשר מראה לנו שוקטורים יכולים להיות יצורים משונים מאוד, ולא רק מערכת צירים מקובלת ומוכרת.

8) SPAN, צירוף ליניארי, תלות ואי-תלות של וקטורים

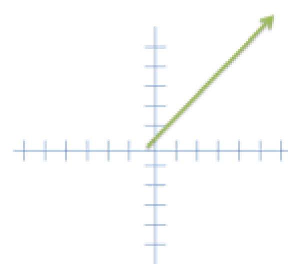
הגענו לקבוצת קונספטים קשורים מרכזיים של אלגברה ליניארית: תלות ליניארית, Span ("ספאן") וצירוף ליניארי.

נתחיל מהקל ביותר: צירוף ליניארי, כשמו כן הוא: צירוף בעל מקדמים 'ליניארים', כלומר בשפת יום-יום, 'בלי חזקות'. לדוגמא, אם יש לנו את האיברים x, y, z, אזי 2x+3y+4z הוא צירוף ליניארי של x, y, z. לעומת זאת x^2+3y אינו צירוף ליניארי, כי יש בו מרכיב שאינו ליניארי. בהקשרי מרחב וקטורי, נוכל לומר כי אם V מ"ו (מרחב וקטורי) מעל שדה F, ויש לנו וקטור v בתוך מ"ו V, אזי נאמר ש-v הוא צירוף ליניארי של וקטורים v_1, v_2, v_3 אם מתקיים ש-$v=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3$, כש-a_1, a_2, a_3 הם איברים בשדה ("סקלארים"). כלומר, אם לדוגמא מתקיים $v=2*v_1+1*v_2+5*v_3$.

נמחיש זאת ע"י הדוגמא הבאה. יהי V המ"ו $\mathbb{R}^2$, ויהיו הוקטורים v1 (שחור) ו-v2 (אדום) וקטורים ב-V.

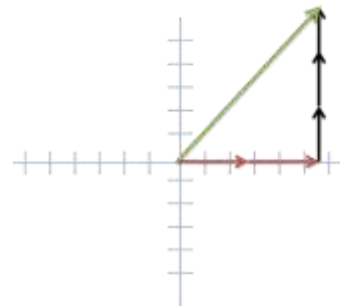


כעת, נתבונן בוקטור v (ירוק):



האם v הוא צ"ל של v1 ושל v2? קל לראות שכן, כי עם המקדמים הנכונים, נוכל לבנות משוואה לפיה

v=a1*v1+a2*v2, לדוגמא



כלומר, v=2*v2+3*v1. ומכאן v הוא צ"ל של v1,v2.

לעומת זאת, האם ניתן להסתכל על v כעל צ"ל של v1 <u>לבדו</u>? ברור שלא, כי ברור שאין אף מקדם שעבורו v=a1*v1.

כעת, משהגדרנו מה זה 'צירוף ליניארי', נתבונן בהרחבה למושג זה: Span (אשר לעיתים מופיע כ-SPAN או כ-Sp, ולעיתים אף מופיע בעברית בתור 'ספאן'). נתחיל בהגדרה שאיננה פורמלית: משמעות Span של קבוצה היא 'אוסף כל הצירופים הליניארים איברי הקבוצה הזו'. לדוגמא, בהינתן הקבוצה A= {x,y,z} , הספאן יהיה:

Sp(A) = Span(A) = Span({x,y,z,}) = a1*x + a2*y * a3*z

כאשר a1, a2, a3 הם כל מספר מהשדה. כך לדוגמא הביטוי "2x+3y+4z" שייך לספאן-A, וכך גם 4y+5z, וגם 0.5x, וכו'.

כאשר אנו מדברים במרחבים וקטורים מעל שדות מסוימים, ספאן מוגדר בצורה מדויקת.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל שדה F, ותהי $A \subseteq V$ קבוצת וקטורים ב-V.

נגדיר $Sp(A) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, ...\alpha_n \in F, v_1 ... v_n \in A\}$

הסבר לנוסחה לעיל: V1....Vn הם הוקטורים בקבוצה A[9], וספאן A הוא כל צירוף ליניארי של איברי A (למשל $(2*v_1 + 5*v_2 + ... + 4*v_n)$, כאשר המקדמים הם האיברים בשדה (כפי שראינו קודם, לשדות שונים יש איברים שונים, ואלו הם המקדמים האפשריים של האיברים בקבוצה). כמובן, אחד או יותר מהמקדמים יכול להיות גם אפס, ולכן אפס המרחב הוקטורי תמיד שייך גם הוא לספאן.

כעת נכיר את המונח <u>אי-תלות ליניארית</u>.

נניח כי $v_1, v_2, ..., v_m \in V$ (וקטורים אשר שייכים למרחב וקטורי V). הוקטורים $v_1, v_2, ..., v_m$ נקראים <u>בלתי-תלויים ליניארית</u> (<u>בת"ל</u>) אם אין צירוף ליניארי שלהם אשר שווה לאפס - מלבד הצירוף הטריוויאלי, בו כל המקדמים הם אפס.

[9] כאן, כמו בכל מקום במסמך זה מלבד אם מצוין במפורש אחרת, אנו עוסקים אך ורק בקבוצות סופיות, כלומר בעלות מספר סופי כלשהו של איברים.

כלומר, אם לכל צירוף $a_1*v_1+a_2*v_2+...+a_m*v_m=0_V$ **, אזי כל** $a_1,a_2,...,a_m$ **הם אפס.**

אחרת – אם קיים צירוף ליניארי שאיננו "טריוויאלי" (כלומר, צירוף ליניארי שלא כל המקדמים בו הם אפס) כך שסכום האיברים שווה לאפס, אזי הקבוצה נקראת "תלויה ליניארית".

<u>דוגמאות לקבוצות בלתי תלויות לינארית</u>

1. 2 וקטורים במישור ($\mathbb{R}^2$) שאינם על אותו הישר, הם בלתי-תלויים ליניארית (בת"ל). גיאומטרית, ניתן לדמיין זאת: שני וקטורים שאינם "על אותו הקו", לא נוכל להגיע לאפס (ראשית הצירים) ע"י חיבור וחיסור שלהם – רק ע"י הכפלה של שניהם באפס.

   נסביר שוב: נשים לב כי צירוף לינארי של שני וקטורים v,u, כלומר av+bu, הוא למעשה חיבור של הוקטורים av, bu, כלומר חיבור של שני וקטורים שנמצאים על הישרים של v, u בהתאמה. אם חושבים על זה, חיבור של שני וקטורים ייתן אפס רק אם הם וקטורים נגדיים, (או אם שני הוקטורים הם וקטורי האפס). לכן, צירוף לינארי כנ"ל יכול להתאפס רק אם שני המחוברים מתאפסים, כלומר אם a=b=0. (נסו זאת בעצמכם עם שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^2$).

2. שוב ב- $\mathbb{R}^2$: אם V=(a,b) (וקטור עם 2 קורדינטות) ו-W=(c,d), אז W,V בת"ל אמ"מ ("אם ורק אם") למערכת המשוואות

   ax+cy=0

   bx+dy=0

   יש פיתרון יחיד.

   (סקיצת ההוכחה: נסתכל על צירוף ליניארי של V ו-W אשר שווה לאפס, ונראה שהמקדמים חייבים להיות אפס:

   xV+yW=0, כלומר

   $x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, ← $\begin{pmatrix}xa\\xb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}yc\\yd\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ← xa+cy=0, bx+dy=0, ומהנתון שיש פיתרון יחיד, x=y=0, ומכאן הראנו שאם יש צירוף ליניארי שמגיע לאפס אז כל המקדמים הם אפס).

נביא כעת משפטון להגדרות שקולות של תלות ליניארית, אשר יובא לעת עתה ללא ההוכחה.

<u>התנאים הבאים שקולים, לגבי כל קבוצת וקטורים $v_1,v_2,...,v_n$ במרחב וקטורי V כלשהו:</u>

1) הוקטורים $v_1,v_2,...,v_n$ תלויים ליניארית.

2) קיימים סקלרים $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{F}$, אשר לא כולם 0_F, כך ש- $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=0_V$

3) קיים j כלשהו (1<=j<=n, כלומר אחד מהאינדקסים של הקבוצה) כך ש- $v_j \in Sp(v_1,...,v_{j-1})$, ז"א קיימים $b_1,b_2,...,b_{j-1}$ כך ש- $v_j=b_1v_1+...+b_{j-1}v_{j-1}$. במילים: קיים וקטור אשר הוא צירוף ליניארי של הקודמים לו (לפי הסדר בו רשמנו אותם).

כאמור, שקילות זו מובאת ללא הוכחה בשלב הזה, ניתן לגזור ממנה את השקילות המקבילה לאי-תלות ליניארית:

יהיו $v_1,v_2,...,v_n$ קבוצת וקטורים במ"ו V. אזי, התנאים הבאים שקולים:

1) הוקטורים $v_1,v_2,...,v_n$ בלתי-תלויים ליניארית (בת"ל).

2) אם עבור סקלרים $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{F}$ מתקיים $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=0_V$, אזי $a_1=0_F, a_2=0_F, ...a_n=0_F$.

3) $v_1 \neq 0_v, v_2 \notin Sp(v_1), v_3 \notin Sp(v_1,v_2), ...v_m \notin Sp(v_1,...v_{m-1})$

נציין כי כל קבוצת איברים בלתי-תלויים ליניארית, כל תת-קבוצה של איברים גם הם בלתי-תלויים ליניארית. עובדה זו לעיתים מלומדת כמשפטון, אך כאן מובאת ללא הוכחה. נשים לב שניתן לראות עובדה זו גם בכיוון ההפוך: אם קבוצה K מכילה קבוצה K', וקבוצה K' תלויה ליניארית, אזי גם קבוצה K תלויה ליניארית.

וכעת משהגדרנו את מושג אי-תלות ליניארית, אנו מתקדמים למושג המרכזי הבא: בסיס ומימד.

9) הגדרת בסיס ומימד

אם U מרחב וקטורי מעל שדה F, אז קבוצת וקטורים $v_1, v_2, ..., v_n$ נקראים בסיס של המרחב הוקטורי U כאשר:

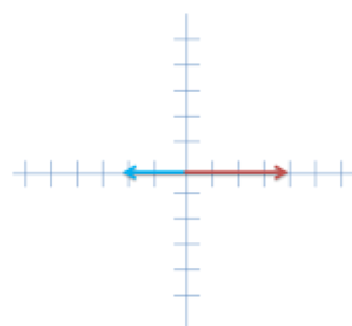
א) U=Sp($v_1, v_2, ..., v_n$)

ב) $v_1, v_2, ..., v_n$ בלתי-תלויים ליניארית.

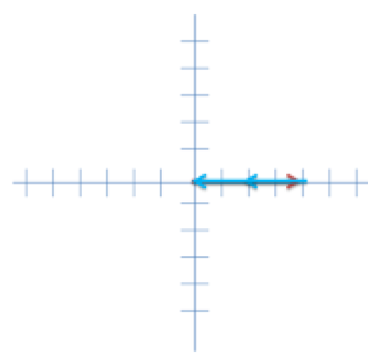
במקרה כזה, נגדיר גם את המימד של U להיות מספר האיברים שמרכיבים את הבסיס (במקרה כנ'ל, n וקטורים), ונסמן $\dim_F U = n$, כאשר dim מציין את מימד U. (קיצור ל-"dimension" באנגלית, מימד).

משהגדרנו פורמלית[10] את המושג, נחזור וניתן מעט אינטואיציה גיאומטרית, בעזרת המישור $\mathbb{R}^2$. כזכור, $\mathbb{R}^2$ הוא מרחב וקטורי, ואנו נתבונן בבסיס שלו ובמימד של הבסיס שלו, כדי להבין מושגים אלו. שוב, הבא הינו רק המחשה גיאומטרית כדי להבין את המושג: בסיס ומימד יש לכל מרחב וקטורי באשר הוא.

אם כן, נתבונן ב- $\mathbb{R}^2$ דרך הייצוג האהוב עלינו, מערכת צירים קרטזית. ונתבונן בשני וקטורים, u (כחול) ו-v (אדום):



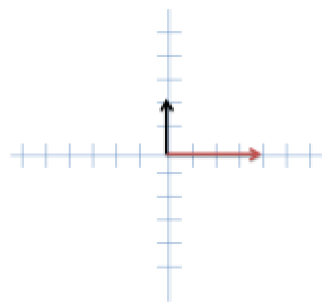
שני וקטורים אלו הם תלויים ליניארית. אפשר לראות בקלות שע"י 2*u+1*v נגיע לאפס:



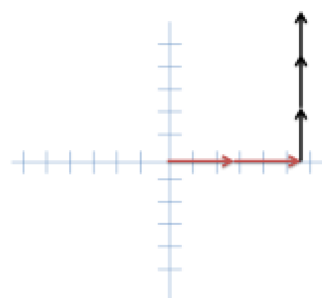
[10] הגדרנו פורמלית פחות או יותר – נדרש לדקויות נוספות בהמשך, כמו העובדה שלמרחב מסוים ייתכנו בסיסים שונים, וכן שלכל הבסיסים יש את אותו מספר האיברים.

כלומר, יש צירוף ליניארי (לא טריוויאלי) שלהם ששווה לאפס, כלומר הם תלויים ליניארית. מכאן אנו כבר רואים ששני וקטורים אלו לא יוכלו להיות 'בסיס', שכן הם לא עונים על התנאי השני. מסיבה זו, גם וקטור אחד לא יוכל להיות בסיס, שכן הוא לא יוכל לפרוש את כל המרחב.

כעת נתבונן בשני וקטורים אחרים, w (שחור) ו-v (אדום):



קל לראות שאין דרך 'לחבר' אותם כך שיגיעו לאפס, חוץ מצירוף ליניארי שבו המקדם של כל אחד מהם הוא 0. כלומר, הם בלתי תלויים ליניארית. בנוסף, הם <u>פורשים</u> את $\mathbb{R}^2$, כלומר ניתן להגיע לכל נקודה (כלומר לייצג כל וקטור) ב-$\mathbb{R}^2$ ע"י צירוף ליניארי של 2 וקטורים אלו:



כלומר, $\mathrm{Sp}(v,w)=\mathbb{R}^2$. מילאנו את שני התנאים, ולכן ניתן לומר ש-v ו-w ביחד הם <u>בסיס</u> ל-$\mathbb{R}^2$. כמו-כן, אנו יכולים לראות ש<u>מימד</u> $\mathbb{R}^2$ הוא מספר איברי הבסיס – כלומר 2 – וזה תואם את מה שכבר הכרנו אינטואיטיבית, ש-$\mathbb{R}^2$ הוא "דו-מימדי".

כמובן, ייתכנו בסיסים רבים (למעשה, אינסוף) לאותו מרחב-וקטורי. תכונה משותפת לכל הבסיסים היא מספר האיברים בהם – מימד המרחב.

10) הגדרת העתקה ליניארית, הצגת $\mathbb{R}^3$

הגדרה: יהיו U, V מרחבים וקטורים מעל שדה F. העתקה $f:U\to V$ נקראית <u>העתקה ליניארית</u> (ולעיתים נקראית באופן מקביל "טרנספורמציה ליניארית") כאשר היא העתקה אשר:

א) משמרת חיבור: לכל $u_1,u_2\in U$, $f(u_1)+f(u_2)=f(u_1+u_2)$

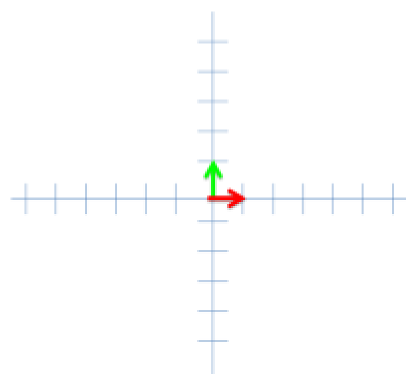
ב) משמרת כפל בסקלר: לכל $u\in U$, ולכל $c\in F$, $f(c*u)=c*f(u)$

העתקה ליניארית, כאמור, משמשת אותנו 'להעתיק' וקטור ממרחב וקטורי אחד למרחב וקטורי אחר (או לאותו המרחב). המילה 'העתקה' הינה זהה במשמעותה למילה המוכרת פונקציה. ניתן דוגמא להעתקה ליניארית.

נסתכל על העתקה T, אשר פועלת מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^2$. כלומר, T לוקחת וקטור ב-$\mathbb{R}^2$, מפעילה עליו 'טרנספורמציה', ומחזירה וקטור אחר ב-$\mathbb{R}^2$. מתמטית, מסמנים זאת $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. נבחר בסיס ל-$\mathbb{R}^2$, ונגדיר את T לפי האופן בו היא פועלת על איברי הבסיס. זוהי נקודה חשובה: העתקה ליניארית מוגדרת (כלומר נקבעת ביחידות) לפי האופן שבו היא פועלת על איברי הבסיס, ובעזרת תמונת איברי הבסיס (כלומר, איך שההעתקה פועלת על איברי הבסיס) ניתן לחשב כיצד ההעתקה פועלת על כל איבר במרחב. נוכיח את משפט זה בהמשך (זהו משפט יסודי וחשוב).

נחזור לדוגמא. לשם הפשטות, ניקח את מה שמכונה הבסיס ה'סטנדרטי' של $\mathbb{R}^2$, והוא הוקטורים e1 ו-e2:

הוקטור e1 הוא וקטור "1 בכיוון ציר x", כלומר מה שמוכר כייצוג $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, ואילו e2 הוא מקבילו בציר ה-y, כלומר $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. גרפית, זה נראה כך, עם e1 באדום וe2 בירוק.



כפי שראינו בסעיף על בסיסים ומימד, שני וקטורים אלו אכן מהווים <u>בסיס</u> לכל $\mathbb{R}^2$.

כעת נגדיר את העתקה T כפועלת כך על איברי הבסיס:

- $T(e1) = e1$
- $T(e2)=2*e2$

כלומר, אם מפעילים את T על e1 מקבלים e1, ואם מפעילים את T על e2 מקבלים פעמיים את e2.

נשים לב שמכיוון ש-T ליניארית – כלומר משמרת חיבור וכפל, על-פי ההגדרה לעיל, אנו יודעים גם כמה נקבל מלהפעיל את T על (למשל) 5e1:

$T(5*e1) = 5*T(e1) = 5 * e1$, וזאת בגלל שימור הכפל והגדרת פעולת T על e1.

באופן דומה, $T(5*e2) = 5 * T(e2) = 5 * 2 * e2 = 10 * e2$.

כמו כן, בגלל שימור ה<u>חיבור</u> של T, אנו יודעים את השפעת T על (למשל) 2e1+3e2:

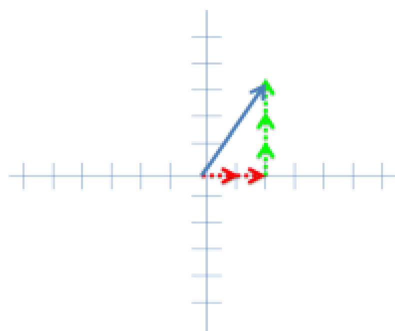
$T(2e1+3e2) = T(2e1)+T(3e2)$

וזאת בגלל שימור השימור, ואת זאת נוכל לפתח עוד:

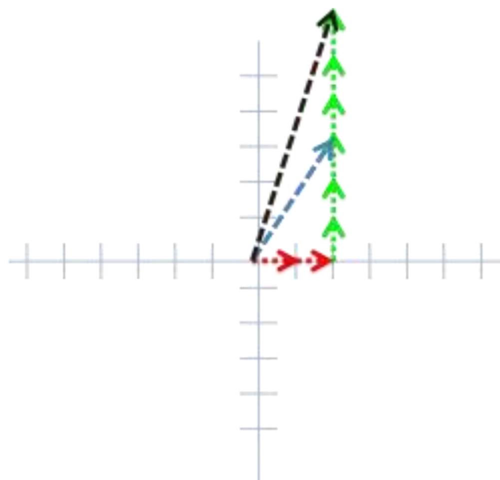
$T(2e1+3e2) = T(2e1)+T(3e2) = 2 * T(e1) + 3 * T(e2) = 2 * e1 + 3 * 2 * e2 = 2e1+6e2$

כלומר, לו היה לנו וקטור שנראה מצורת 2e1+3e2 – וקטורי סטנדרטי במרחב – פעולת T עליו הייתה מחזירה 2e1+6e2. גרפית, זה היה נראה כך:

יש לנו את וקטור u=2e1+3e2 (בכחול):



ולאחר הפעלת T עליו אנו מקבלים את T(u), 2e1+6e2, (בשחור):



באופן דומה, נדע את פעולת T על כל וקטור, ומכאן אנו יודעים כיצד T פועל על המרחב כולו.

זו הייתה דוגמא לטרנס' ליניארית.

כעת נתבונן בדוגמא לטרנספורמציה שאינה ליניארית, גם היא מ- $\mathbb{R}^2$ לעצמו. נתבונן בהעתקה $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, אשר נגדיר באופן הבא (נבהיר: זו <u>אינה</u> העתקה ליניארית): אם ל-u "קואורדינאטות" $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, כלומר u=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, אזי נגדיר את T(u)=T$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$.

לדוגמא, אם u=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, אזי T(u)=$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. קל להראות שהעתקה זו אינה משמרת חיבור, באופן הבא:

אם T הזו הייתה משמרת כפל, אזי T(c*u)=c*T(u) עבור c כלשהו מהשדה (כזכור, אנו ב- $\mathbb{R}^2$, מרחב וקטורי מעל שדה הממשיים). אם כן, כדי לשמר כפל, נדרוש עבור למשל c=2 ש:T(2*u)=2*T(u). אבל קל לראות שזה לא נכון, כי

T(2*u)=T(2*$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)=T($\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$)=$\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

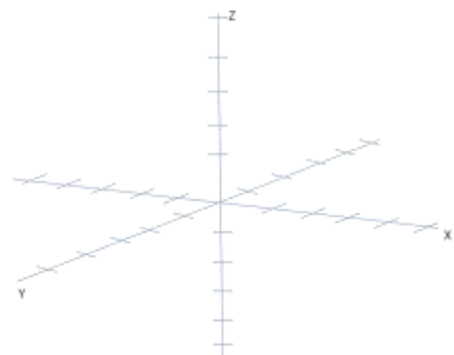
ולעומת זאת

2*T(u)=2*T($\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)=2*$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

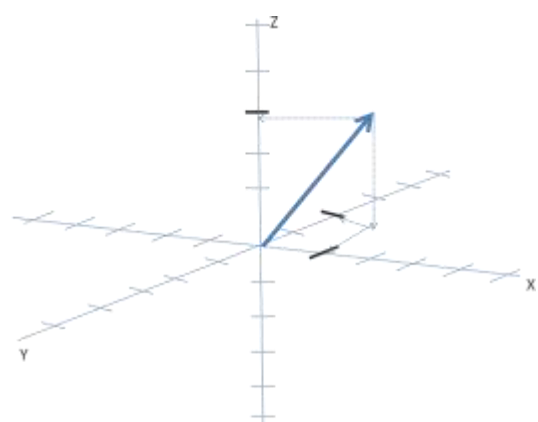
וכמובן שאינם זהים. (באופן דומה, ניתן להראות ש-T גם אינה משמרת חיבור, אך למעשה זה לא הכרחי כדי להוכיח ש-T אינה טרנס' ליניארית, שכן טרנס' ליניארית צריכה לשמר גם חיבור וגם כפל).

בקיצור, T הזו – אשר מסתמכת על העלאת איברים בריבוע – אינה ליניארית, ובאופן כללי (כאינטואיציה) ניתן לומר שטרנספורמציה ליניאריות מבצעות, כמצופה, שינויים ליניארים על האיברים בלבד.

התבוננו עד עתה בדוגמאות לטרנספורמציות מאותו המרחב - $\mathbb{R}^2$ - לעצמו. כדי להרחיב את אופקינו, נתבונן כעת בהעתקה ממרחב אחר - $\mathbb{R}^3$ - ל- $\mathbb{R}^2$. גם $\mathbb{R}^3$ כנראה מוכר לכם מהתיכון (ומהאינטואיציה), וניתן לייצג אותו גרפית[11] כמערכת צירים תלת-מימדית:



וקטור לדוגמא ב-$\mathbb{R}^3$ יהיה הוקטור $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, אשר גרפית ייראה כך:



[11] נזכיר שוב, שכל ייצוג גרפי הוא למען האינטואיציה וההבנה, ואינו מהווה, בשלב זה, אובייקט מתמטי מוגדר היטב. עם זאת, כאמצעי הוראתי והבנתי, הוא חשוב ועוזר מאוד.

הבסיס הסטנדרטי ל-$\mathbb{R}^3$ מורכב מהאיברים e1, e2, e3, אשר הינם בהתאמה $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

כעת, נגדיר העתקה[12] T מ-$\mathbb{R}^3$ ל-$\mathbb{R}^2$ באופן הבא:

T(e1) = $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

(שימו לב שלמעשה כתבנו פה את הדבר הבא: $T(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ - מעבר מ-3 קואורדינטות ל-2 – וזה כי אנו אכן עושים העתקה ממרחב 3-מימדי למרחב 2-מימדי).

בנוסף, נגדיר

T(e2)=$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

וכן

T(e3)=$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

כעת, מה תהיה פעולת T על הוקטור שהגדרנו, u? אם כן, u הינו כאמור הוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. נשים לב שזה שווה לייצוג

$1*\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2*\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, כלומר $1*e1+2*e2+3*e3$. (ולכן קוראים לזה הבסיס הסטנדרטי)

אם כן, כיצד ייראה T(u)?

T(u)=T($1*e1+2*e2+3*e3$) = 1*T(e1)+2*T(e2)+3*T(e3) =

12 הסימון המקובל להעתקה הינו T, אך זהו בפירוש רק סימון, ובאותה המידה ניתן להגדיר העתקה בשם G, או F, או כל דבר אחר. מטעמי נוחות הקריאה, מאוד נפוץ שלהעתקות קוראים T, כקיצור ל-Transformation. סימון נפוץ נוסף להעתקות הוא f, כקיצור ל-function.

$$1*\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+2*\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+3*\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

כלומר, לבסוף קיבלנו כי

$T(u)=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ - וקטור ב-$\mathbb{R}^2$ (שתצוגתו לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$, כמובן, היא 4e1+5e5).

אם כן, זו הייתה דוגמא להעתקה ליניארית ממרחב אחד ($\mathbb{R}^3$) לאחר ($\mathbb{R}^2$).

נציין, שכפי שהגדרנו בהגדרת המרחב הוקטורי, יש להגדיר את פעולות החיבור בין וקטורים ואת פעולות הכפל של סקלארים בוקטורים. ב-$\mathbb{R}^2$ הגדרה זו אינטואיטיבית, אך יש צורך לציין אותה במפורש: חיבור בין וקטור $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ לבין וקטור $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ מוגדר כמובן כ-$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+x\\b+y\end{pmatrix}$, וכפל של סקלאר c מהשדה בוקטור $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ מוגדר בתור $c\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ca\\cb\end{pmatrix}$. עובדות אלו, סביר להניח, היו מובנות כבר, ואף השתמשנו בהן. ראוי להזכיר זאת כאן, כי אם למשל ננסה לחבר וקטור מ-$\mathbb{R}^3$-נניח, את $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ עם הוקטור $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, מה נקבל? כלום, זו פעולה שכלל אינה מוגדרת. לא מחברים בין וקטורים ממרחבים וקטורים שונים.

הערה: בשלב זה של החומר, חשוב מאוד שהתלמיד יהיה מסוגל לחשב כיצד טרנספורמציה מסוימת פועלת על כל וקטור, בהינתן הצ"ל של איברי הבסיס אשר מרכיבים את הוקטור, ובהינתן מידע על כיצד פועלת הטרנספורמציה על כל אחד מאיברי הבסיס. הדרך היא כאמור, כפי שביצענו לעיל – חלוקה של הוקטור לאיברי הבסיס, וע"י ליניאריות הטרנספורמציה חלוקה לחיבור ולכפולות של פעולות של הטרנספורמציה על איברי בסיס, שכאמור אנו יודעים כיצד הם מושפעים. שאר החומר נשען באופן כבד על הבנה של נושא זה, אז יש לוודא את הבנתו לעומק בטרם ממשיכים.

11) ker ו- Im של העתקה – הגרעין והתמונה

כעת נגדיר שני מאפיינים שיש לכל העתקה ליניארית – ה'גרעין' (Kernel, או בקיצור ker) וה'תמונה' (Image, או בקיצור Im), אשר ייחודיים לכל העתקה בין כל שני מרחבים.

ההגדרה: יהיו U,V מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהיה $f:U\to V$ העתקה ליניארית.

$$\ker(f)=\{u\in U \mid f(u)=0_V\}$$

$$\operatorname{Im}(f)=\{v\in V \mid \exists u\in U: v=f(u)\}$$

במילים (ואינטואיטיבית), ker(f) ("הגרעין") הוא כל האיברים ב-U אשר f שולחת אותם ל-0, ו-Im(f) ("התמונה") היא כל האיברים אשר "ניתן להגיע אליהם" במרחב הוקטורי שהוא היעד של ההעתקה. נשים לב שהגרעין קיים בתוך המרחב המקורי, והתמונה בתוך מרחב היעד.

למעשה, הגרעין והתמונה הם בעצמם תתי-מרחבים. נוכיח זאת כעת.

טענה:

1. Ker(f) הוא תת-מ"ו של U.
2. Im(f) הוא תת-מ"ו של V.

הוכחה:

1) $f(0_U)=0_V$ כי f העתקה ליניארית (עובדה זו נכונה לכל העתקה ליניארית). מכאן:

א) $0_U\in\ker f$, כלומר $\ker f$ אינו קבוצה ריקה.

ב) יהיו $u_1,u_2\in\ker f$. אז:

$$f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)=0_V+0_V=0_V$$

כלומר $u_1+u_2\in\ker f$

ג) יהי $u\in\ker f$, וניקח $c\in\mathbb{F}$ (סקלאר מהשדה), ונראה כי

$$f(cu)=c*f(u)=c*0_V=0_V$$

כלומר $cu\in\ker f$

אז הראנו ש-ker(f) היא תת-קבוצה אשר סגורה לחיבור ולכפל, ומכאן הראנו שהיא מקיימת את הדרישות עבור תת-מרחב.

2) $f(0_U)=0_V$ ולכן $0_V\in\operatorname{Im}(f)$, אז

א) התמונה אינה קבוצה ריקה.

ב) נניח כי $v_1, v_2 \in \operatorname{Im} f$. אזי, קיימים $u_1, u_2 \in U$ כך ש- $f(u_1) = v_1; f(u_2) = v_2$, ולפיכך

$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$, כלומר גם $v_1 + v_2$, בתור וקטור, נמצא בתמונה – כי יש לו מקור (המקור שלו הוא הוקטור $u_1 + u_2$). כלומר, התמונה סגורה לחיבור.

ג) באופן דומה, נניח כי $v \in \operatorname{Im} f$, $c \in \mathbb{F}$. ז"א קיים $u \in U$ כך ש- $f(u) = v$ ולכן $f(cu) = cf(u) = cv$, כלומר גם $cv \in \operatorname{Im} f$, ולכן $\operatorname{Im} f$ סגור גם לכפל.

הראנו שהתמונה סגורה לחיבור, לכפל, ואינה ריקה, ומכאן גם היא תת-מ"ו – כנדרש.

משהוכחנו באופן פורמלי, ניתן שוב דוגמא גרפית, בשביל האינטואיציה. נתבונן ב- $\mathbb{R}^3$, נשתמש בבסיס הסטנדרטי שלו ונגדיר העתקה $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ באופן הבא:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

נתבונן כעת כיצד העתקה זו פועלת למשל על הוקטור שהגדרנו מקודם, $u \in \mathbb{R}^3$, = $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

כזכור, $u = 1*e1 + 2*e2 + 3*e3$, ומכאן ניתן לראות כי

$$T(u) = T(1*e1 + 2*e2 + 3*e3) = 1*T(e1) + 2*T(e2) + 3*T(e3) = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

קיבלנו וקטור ב- $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. נשים לב, שאחת הקואורדינאטות ב-u, קואורדינטת "z", לא השפיעה כלל על התוצאה, ולמעשה פעולת T הייתה זהה גם על וקטור עם קואורדינאטות x,y זהות, אך קואורדינאטת z שונה. למשל, אם ניקח את $v = \begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$ נקבל את אותו האיבר בתמונה (נסו זאת בעצמך וראו). מדוע זאת? זאת כי "ציר z" מהווה את הגרעין של העתקה T הזו. כל איבר על ציר z (למשל, e3, וכן הוקטור $\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}$) יישלחו ל-0 של $\mathbb{R}^2$ (הרי הוא $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$). ואכן, "ציר z" הוא תת-מרחב, כפי שהוכחנו שהגרעין הינו תמיד תת-מרחב. מה התמונה במקרה הזה? התמונה היא כל $\mathbb{R}^2$, שהרי לכל וקטור ב- $\mathbb{R}^2$ אפשר להגיע.

מה היה קורה אם היינו משנים מעט את ההגדרה של T, כך שתפעל באופן הבא:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

נשים לב שהשינוי הוא שעכשיו גם e2 נשלח לאפס, ובגלל שימור כפל של T, כעת <u>כל</u> ערך בקואורדינאטת y יישלח ל-0. למשל, על הוקטור u מקודם, T(u) יחזיר $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. על הוקטור $w=\begin{pmatrix}3\\527\\23.5\end{pmatrix}$, T(w) יחזיר $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$. למעשה, כעת כל איבר מ"ציר y" ומ"ציר z" נשלח לאפס. <u>גרעין ההעתקה הוא תת-המרחב הנפרס ע"י הוקטורים $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, תת-המרחב המכונה "מישור y-z"</u>.

באופן פורמלי, נוכל לתאר את הגרעין כ-$Sp(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$. לעומת זאת, אנו רואים שגם התמונה שלנו השתנתה – כבר איננו יכולים להגיע לכל וקטור ב-$\mathbb{R}^2$ כפי שיכולנו להגיע קודם. למשל, לוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ אנו איננו יכולים להגיע. אנו יכולים להגיע רק ל"ציר {ישר} ה-x", ואכן התמונה של העתקה זו היא ישר ה-x (באופן פורמלי, ניתן לתאר את תמונה זו כ-$Sp(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$). נשים לב שההעתקה כעת איננה העתקת 'על'. נשים לב גם כי <u>מימד</u> הגרעין הוא כעת 2, ומימד התמונה 1, וסכום מימדיהם 3 – כמימד מרחב התחום (המוצא). סכום מימדי הגרעין והתמונה תמיד שווים למימד מרחב התחום (כלומר, המקור), ועובדה זו נוכיח בהמשך.

עובדה מעניינת וחשובה, אשר נתעמק בה בהמשך, היא שקבוצת העתקות ליניאריות (ממרחב U כלשהו למרחב V כלשהו) מהוות בפני עצמן מרחב וקטורי. זוהי קפיצה מחשבתית מורכבת יותר, ובוודאי שקשה יותר להמחיש אותה גרפית. אנו נפתח רעיון זה לעומק בהמשך, כאמור, אך לבינתיים נגדיר את פעולות החיבור והכפל בסקלר הנדרשות לקיים מבנה זה של מרחב וקטורי, אשר נשתמש בהן בעתיד.

אם כן, יהיו U ו-V מ"ו מעל אותו השדה F, ויהיו T ו-H העתקות מ-U ל-V. נגדיר חיבור של שתי העתקות באופן הבא:

$$(T+H)(u)=T(u)+H(u)$$

כמובן שחיבור של שתי העתקות מחזיר העתקה (שהרי זה העולם בו הן חיות – המרחב הוקטורי של העתקות, שבעצמו סגור לחיבור). אנו מגדירים כיצד ההעתקה הזו נראית, לכל וקטור, בעזרת הנוסחא לעיל.

באופן דומה ואינטואיטיבי נגדיר את פעולת הכפלת ההעתקה בכפל בסקלאר c כלשהו מהשדה שמעליו המרחבים הוקטורים:

(cT)(u) = c*(T(u))

ניתן דוגמא פשוטה מ- $\mathbb{R}^2$. נגדיר את העתקה T כפועלת באופן הבא:

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},$$

ונגדיר את העתקה H כפועלת באופן הבא:

$$H\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

אם כן, נתבונן בוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$=u. אם נחבר את T+H, נקבל העתקה חדשה, כאמור. כיצד היא תפעל על u? ע"פ ההגדרה, $(T+H)(u)=T(u)+H(u)$, כלומר שווה ל- $T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+H\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. זה שווה ל:

$$1*T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2*T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+1*H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2*H\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$$

(ודאו כי אתם מבינים את כל השלבים)

למרחב ההעתקות הליניאריות בין מרחב U למרחב V קוראים $Hom(U,V)$.

ראוי לציין, בשלב זה של החומר, כי אתם כבר יודעים מספיק חומר כדי להיעזר בספרות חיצונית, ובפרט באינטרנט. מאמצים רבים הוקדשו לכתיבה על נושאים אלו. ניתן גם להעשיר את הבנתם האקדמית, וגם להבין את העולם האקדמי בו אתם חיים – לא לבד, אלא כחלק מהקהילה הארצית והעולמית העוסקת בנושא. כאמור, בשלב זה התלמיד כבר יודע מספיק כדי להבין, למשל, את כל מה שכתוב בדף בויקיפדיה על "העתקה ליניארית". נסו והכנסו:
http://he.wikipedia.org/wiki/העתקה_ליניארית

13) בסיסים חלופיים – הצגת וקטור לפי בסיסים שונים, כתיב קואורדינטות

דנו בהצגת וקטור לפי בסיס. כעת נדגיש, שניתן לבחור לאותו מרחב וקטורי בסיסים שונים. בהינתן בסיס מסוים, נקבעת התצוגה של וקטור – כי כל וקטור מוצג כסכום של איברי הבסיס[13], ובהינתן איברי בסיס שונים, גם תצוגת הוקטור תהיה שונה.

נתבונן ב-$\mathbb{R}^2$. אנו רגילים לעבוד עם הבסיס הסטנדרטי, e1, e2 : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. אכן, קל לראות איך אפשר לפרוס את כל המרחב (כל וקטור במרחב) עם שני וקטורים אלו. אבל, במקומם, אנו יכולים לבחור שני וקטורים אחרים – למשל, נבחר וקטור b1=$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, ו-b2=$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. אלו כמובן וקטורים שונים מ-e1,e2. קל לראות שהם בת"ל (הוכיחו זאת בעצמכם, כתרגול). נראה שהם גם פורשים את המרחב – כלומר, שבהינתן כל וקטור שהוא, ישנו צ"ל (צירוף ליניארי) של b1,b2 אשר תוצאתו אותו הוקטור.

נניח וקטור כללי v=$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. איזה צ"ל של איברי b1,b2 מחזיר את v? כלומר, אנו מחפשים את הפתרון למע' המשוואות $c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (איברים c1, c2 יהיו המשתנים בצ"ל שלנו)

זה שקול ל-

$$\begin{pmatrix}3*c_1+2*c_2\\c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

כלומר, אנו כבר רואים ש-c1=y, ומכאן נציב ונקבל:

$$\begin{pmatrix}3y+2*c_2\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

כלומר $c2=\frac{x-3y}{2}$.

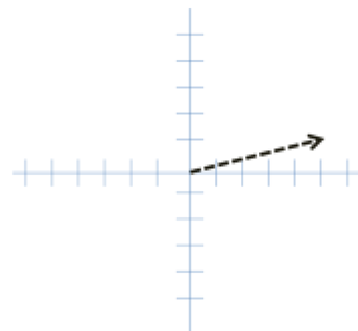
החישובים פחות משמעותיים, מה שהוכחנו זה שבהינתן וקטור v=$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, אנו יכולים להראות שהוא בנוי מהוקטורים b1,b2, כי

$$v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = y*(b1)+\frac{x-3y}{2}(b2)$$

[13] עובדה זו נוכיח בהמשך, בחלק של ההוכחות.

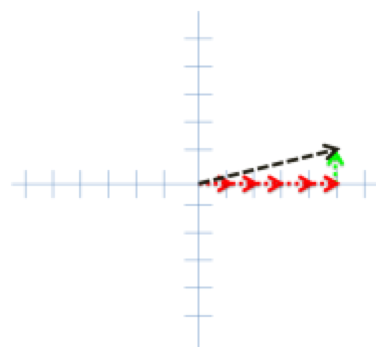
כלומר, b1,b2 הם 2 וקטורים בת"ל אשר פורסים את $\mathbb{R}^2$ - על-פי ההגדרה, יש לנו בסיס חדש. נקרא לבסיס זה, הקבוצה המכילה את b1 ואת b2, בשם B. (בניגוד לבסיס הסטנדרטי, e1, e2המכיל , אשר לרוב נקרא E)

אם כן, יש לנו כעת שני בסיסים – E ו-B. כל וקטור אפשר להציג לפי E, או לפי B. לדוגמא, נסתכל על הוקטור $u=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, ושוב רק לצורך ההמחשה גם נציירו גרפית:



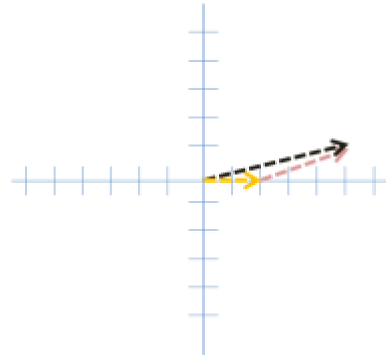
וקטור זה הוא סכום של צ"ל של e1 ושל e2: הוא 5 פעמים e1, ועוד פעם אחת e2.

u=5*e1+1*e2



מאידך, הוא גם צ"ל של b1 ושל b2 – הוא פעם אחת b2 (בצהוב) ועוד פעם אחת b1 (בסגול).

u=1*b1+1*b2



כמובן שמדובר באותו הוקטור, ומה שאנו מדגישים כאן הוא ש'וקטור' בעצם מתאר צירוף ליניארי של איברי הבסיס. הכתיב המקובל לוקטור – עמודת קואורדינאטות – היא למעשה דרך לרשום את המקדם הסקלארי של כל איבר מאיברי הבסיס. כאשר אנו רושמים שוקטור הוא $u=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, זהו למעשה קיצור ללרשום "הוקטור הזה הוא הוקטור המתקבל מ-5 פעמים איבר הבסיס הראשון, ועוד פעם אחת איבר הבסיס השני". אם לא מצוין אחרת, הכוונה היא תמיד לבסיס הסטנדרטי, ואז הכוונה היא ל-5*e1+1*e2. כפי שראינו, יכולנו לבחור בסיס אחר – נניח, בסיס B – אז לפיו, היינו כותבים את הוקטור $u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, כי הוא פעם אחת איבר הבסיס הראשון, ועוד פחת איבר הבסיס השני: $1*b1+1*b2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=u$. כדי להמחיש לפי איזה בסיס הוקטור מוצג, נהוג להוסיף כיתוב בפינת הסוגריים: $u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^B$, למשל. כאמור, אם לא מצוין אחרת, הכוונה היא לבסיס הסטנדרטי.

כמובן, לעיל נתנו דוגמאות על $\mathbb{R}^2$, אבל אותו הדבר נכון לכל מרחב וקטורי – ניתן לבחור בסיסים שונים, וכך להגיע לתצוגות שונות של וקטורים.

מעבר לכך, כאשר אנו מבצעים העתקה ליניארית, ומעתיקים ממרחב וקטורי U (בעל בסיס $A=\{u_1,....,u_n\}$) למרחב וקטורי V (בעל בסיס $B=\{v_1,...,v_n\}$), אנו נסתכל על הוקטורים ב-U כמיוצגים לפי בסיס A, ועל הוקטורים ב-V כמיוצגים לפי בסיס B (זאת מן הסתם. אין שום חלופה אחרת, אם לא הגדרנו בסיסים אחרים). האובייקט המתמטי שיעזור לנו להבין את הקשר בין ייצוג וקטור u ב-U לפי בסיס A לבין ייצוג T(u)=v ב-V (הוקטור אחרי ההעתקה) לפי בסיס B, נקרא מטריצה, ואנו נלמד כיצד להשתמש בה.

14) מטריצות כייצוג של העתקות ליניאריות

יהיו U,V מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיה $u_1,...,u_n$ בסיס של U, $v_1,...,v_m$ בסיס של V.
בהינתן העתקה לינארית $f:U\to V$, נסתכל על איך f פועלת על איברי הבסיס של U (כי כזכור, לפי איך שההעתקה פועלת על איברי הבסיס, מוגדרת פעולת ההעתקה על כל האיברים).

נסתכל על פעולת f על u1, ונקרא לתוצאה w1. כלומר, $f(u_1)=w_1$. כעת, w_1 הוא איבר ב-V, אז יש לו תצוגה מסוימת לפי איברי הבסיס של V. נניח ש- $w_1=a_{11}v_1+a_{21}v_2+...+a_{m1}v_m$ - צירוף ליניארי כלשהו של איברי הבסיס. (כאשר $a_{11},....,a_{1n}$ מייצגים סקלארים מהשדה $\mathbb{F}$)

באופן דומה, נסתכל על פעולת f על u2, ונקרא לתוצאה w2: $f(u_2)=w_2$. גם את w2 נוכל לייצג לפי איברי בסיס V, עם מקדמים (ייתכן אחרים משל w1) כלשהם: $w_2=a_{12}v_1+a_{22}v_2+...+a_{m2}v_m$

כך נמשיך, עד לפעולת f על איבר הבסיס האחרון של U: $f(u_n)=w_n$,
$w_n=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+...+a_{mn}v_m$

אם כן, קיבלנו את רשימת הוקטורים המתקבלים ע"י הפעלת f על כל אחד מאיברי הבסיס במקור, מחולקים לפי הצירוף הליניארי של איברי הבסיס בטווח:

$$f(u_1)=w_1=a_{11}v_1+a_{21}v_2+...+a_{m1}v_m$$

$$f(u_2)=w_2=a_{12}v_1+a_{22}v_2+...+a_{m2}v_m$$

...

$$f(u_n)=w_n=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+...+a_{mn}v_m$$

כעת, נשים כל שורה כזו בתור עמודה:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ונזכיר שכעת כל עמודה מייצגת את הצ"ל של אחד האיברים שקיבלנו מפעלת f על איבר בבסיס של U. כלומר, העמודה הראשונה מייצגת את הצ"ל המרכיב את w1. בתוך העמודה, האיבר הראשון מייצג את המקדם הסקלארי של איבר הבסיס הראשון, בצ"ל של איברי הבסיס המרכיב את w1. כזכור,

$$f(u_1) = w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m$$

אם כן, מן הסתם במקרה כזה, יהיו לנו n עמודות – אחת על אחד מאיברי הבסיס ב-V, שהפעלנו עליו את f. כמו כן, תהיינה m שורות – אחת לכל אחד מאיברי הבסיס ב-V, אשר צ"ל שלהם מרכיב את התצוגה של $w_1, ..., w_n$. סה"כ, קיבלנו מטריצה m*n (m שורות, n עמודות).

<u>מטריצה זו, נדגיש, מייצגת בדיוק את ההעתקה הליניארית f</u> בהתאם לבסיסים הנתונים. היא מראה לנו כיצד f פועלת על כל איבר בבסיס המרחב עליו ההעתקה פועלת (התחום), ובדיוק איזה איבר היא מחזירה בטווח, לפי צ"ל של איברי הבסיס שם.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ ... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ f(u_1) = w_1 \end{array}$$

העמודה מייצגת את המקדמים של הצ"ל של איברי הבסיס המרכיבים את w1. כלומר, באופן פורמלי, כדי לקבל בעזרת המטריצה

את הערך של וקטור $f(u_j)$ (כאשר j בין 1 ל-n, כלומר על אחד מאיברי הבסיס), נוכל לחשב את $f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}v_i$.[14]

כדי לכתוב "זוהי המטריצה המייצגת את ההעתקה הליניארית f, מבסיס $u_1, ..., u_n$ לבסיס $v_1, ..., v_m$, כותבים $[f]_{v_1,...,v_m}^{u_1,...,u_n}$.

ובסך הכל קיבלנו :

[14] איבר ij במטריצה M הוא האיבר בשורה i, בעמודה j. לעיתים כך גם מציינים באופן שקול את שמה של מטריצה; מטריצה $A = a_{ij}$.

$$[f]_{v_1,...,v_m}^{u_1,...,u_n} = M_{m*n}(\mathbb{F}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ ... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$f(u_1) = w_1$$

או במילים: מטריצת הייצוג של העתקה/טרנספורמציה f מבסיס $u_1,...,u_n$ ל- $v_1,...,v_m$, היא <u>מטריצה</u> M עם m שורות ו-n עמודות מעל שדה $\mathbb{F}$ - כלומר, כל איבר בתוכה הוא משדה שדה – ואת המטריצה עצמה, על מקדמיה. זו כמובן דרך מאוד נוחה ותמציתית להצגה של טרנספורמציה ליניארית.

אכן, בהינתן העתקה $T:U \to V$ (העתקה T ממ"ו U למ"ו V) ובהינתן מטריצה A המייצגת אותה (לפי בסיסים מסוימים), יהיה זה מדויק לומר ש- $T(u)$ (התוצאה המתקבלת מהפעלת T על וקטור u כלשהו מ-מ"ו U) יהיה שקול ל- $A(u)$[15], כלומר כפל של מטריצה A בייצוג המטרי ציוני של u (כלומר, בעמודת הקואורדינאטות שלו).

ניתן דוגמא: נסתכל על טרנספורמציה T מ- $\mathbb{R}^3$ ל- $\mathbb{R}^2$, אשר פועלת באופן הבא:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$[16]

נסתכל על הוקטור $u = 3*e_1 + 4*e_2 + 5*e_3$, השייך[17] ל- $\mathbb{R}^3$. כיצד נראה $T(u)$? נזכור שלפי הייצוג הסטנדרטי, נוכל גם להציג את הוקטור בצורה הבאה - $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ - אשר כמובן שקולה לחלוטין.

---

[15] $T(u)$ ו- $A(u)$ לעיתים קרובות נכתבים גם בצורה הבאה: Tu, Au.

[16] למעשה, אנו כבר מציגים כאן את פעולת T לפי ייצוג עמודות המקדמים של התוצאה. ייצוג זה שקול לכתיבה הבאה: $T(e_1) = 2*v_1 + 0*v_2$, כאשר $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, או מה שמכונה e_1 (האיבר הסטנדרטי הראשון) של $\mathbb{R}^2$ (וראו ההערה הבאה).

[17] שימו לב לא להתבלבל – גם ל- $\mathbb{R}^2$ יש בסיס 'סטנדרטי' אשר איבריו מכונים e_1, e_2 ... ולכל אחד מהם שתי קואורדינאטות. כאן אנו מדברים על הבסיס הסטנדרטי ל $\mathbb{R}^3$, אשר איבריו – אם כי בעלי שם דומה באופן מבלבל – הינם בעלי 3 קואורדינטות כל אחד.

כעת נראה שלפי "נוסחת" T,

$$T(u)=T(3*e_1+4*e_2+5*e_3)=3*T(e_1)+4*T(e_2)+5*T(e_3)=3*\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+4*\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+5*\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$$

כעת נשים לב שאילו היינו כותבים את T בצורת מטריצה, היינו מקבלים את המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$, כלומר מטריצה אשר נכנה אותה A, המטריצה המייצגת את העתקה T לפי הבסיסים הסטנדרטים (וודאו כי אתם מבינים למה אילו היינו מחליפים בסיסי ייצוג, גם המטריצה הייתה מתחלפת, אם כי ההעתקה הייתה נשארת זהה).

כעת נתבונן ב-$A(u)$, כלומר ב-$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, ונראה כי לפי חוקי כפל מטריצות (אשר יוסברו בעוד שני פרקים), נקבל $\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2*3+0*4+0*5\\0*3+2*4+0*5\end{pmatrix}$, כלומר $A(u)=T(u)$.

חוק זה, על-פי עצם הגדרת המטריצה כמייצגת את ההעתקה, תמיד יהיה נכון – כפל המטריצה בוקטור שקול יחזיר וקטור אשר הוא התוצאה של הפעלת ההעתקה על הוקטור. הוקטור החדש יהיה מיוצג לפי הבסיס אשר לפיו המטריצה מייצגת את ההעתקה.

מהו האובייקט הזה, מטריצה? זהו למעשה וקטור בתוך מרחב וקטורי. איזה מרחב וקטורי? המרחב הוקטורי של מטריצות מהסדר שלו, כפי שמיד נראה.

15) מטריצות – מרחב וקטורי

הסברנו כיצד מטריצה יכולה לייצג טרנספורמציה ליניארית. אך בנוסף, מטריצות הן אובייקט מתמטי, וקבוצת כל המטריצות מסדר מסוים – כלומר, עם מספר מסוים של שורות ושורות – מעל שדה מסוים מקיימות מבנה של מרחב וקטורי. אנו נגדיר להלן את התכונות של המרחב הוקטורי הזה.

אם כן, בהינתן m ו-n קבועים כלשהם, ושדה $\mathbb{F}$, אנו מסתכלים על האובייקט "מטריצה" – ריבוע עם פאות עגולות, בעל m שורות ו-n עמודות, כאשר בכל כניסה (כלומר, 'תא') של המטריצה ישנו סקלאר מהשדה.

לדוגמא בלבד, אם m=2, n=3, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, אזי "וקטור" מהמרחב יכול להיות למשל $M_1=\begin{pmatrix}2,5,6\\1,4,3\end{pmatrix}$, או $M_2=\begin{pmatrix}3,1,8\\0,0,2\end{pmatrix}$.

נהוג להפריד בין הכניסות/ערכים במטריצה ע"י פסיק, אך גם כל דרך מובנת אחרת תתקבל.

כזכור, כדי להגדיר מרחב וקטורי, אנו צריכים להגדיר חיבור בין שני וקטורים, ולהגדיר כפל בסקלאר. ההגדרה היא פשוטה: חיבור מתבצע כניסה-כניסה, וכפל בסקלאר מתבצע ע"י כפל של הסקלאר בכל כניסה.

במילים אחרות, בהינתן לדוגמא $M_1=\begin{pmatrix}2,5,6\\1,4,3\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}3,1,8\\0,0,2\end{pmatrix}$, אזי

$$M_1+M_2=\begin{pmatrix}2,5,6\\1,4,3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3,1,8\\0,0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3,5+1,6+8\\1+0,4+0,3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5,6,14\\1,4,5\end{pmatrix}$$

כפל בסקלאר יתבצע כדלקמן – בהינתן לדוגמא $M_1=\begin{pmatrix}2,5,6\\1,4,3\end{pmatrix}$ ו- $c=2\in\mathbb{R}$, אזי

$$c*M_1=c\begin{pmatrix}2,5,6\\1,4,3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2,5,6\\1,4,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2*2,2*5,2*6\\2*1,2*4,2*3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4,10,12\\2,8,6\end{pmatrix}$$

נבהיר בשלב זה, כי אנו מסתכלים כעת על מטריצות כעל ריבוע עם 'מספרים' (סקלארים, אם לדייק) בלבד, ואיננו מתייחסים לקשר שלהם עם העתקות ליניאריות. כל הפעולות שאנו מגדירים ומתייחסים אליהן בדוברנו על מטריצות מסדר מסוים כמרחב וקטורי, מתקיימות גם ללא הקשר להעתקות הליניאריות אשר המטריצה מייצגת.

זוהי למעשה משפחה של מרחבים וקטורים; בהינתן m ו-n (ו- $\mathbb{F}$) מסוימים, יש לנו מרחב וקטורי מסוים. אנו נדון במטריצות כמרחב וקטורי גם בהמשך, ונוכיח שהמימד של מרחב וקטורי מסוים כזה, הינו m*n. מבלי להוכיח לגמרי, נזכיר את "הבסיס הסטנדרטי של המטריצות", המורכב

מאיברים E_{ij}, אשר i,j באיבר E_{ij} מסמנים את השורה והעמודה בה יש את 1 השדה, בעוד בשאר במטריצה יש רק אפסים.

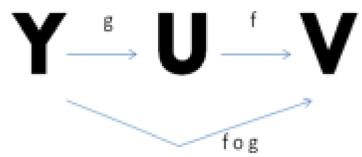
במילים אחרות, למרחב הוקטורי של מטריצות מסדר 2*3 יש בסיס עם 6 איברים, אשר הינם $\begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,0,0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0,1,0 \\ 0,0,0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0,0,1 \\ 0,0,0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0,0,0 \\ 1,0,0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0,0,0 \\ 0,1,0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0,0,0 \\ 0,0,1 \end{pmatrix}$. נסו לראות בעצמכם שאיברים אלו הינם בת"ל, ושאכן בעזרת צ"ל שלהם אכן ניתן להגיע לכל מטריצת 2*3 מעל לשדה.

16) העתקות ליניאריות ומטריצות – איזומורפיזם, הרכבת העתקות, כפל מטריצות

כפי שציינו, לכל העתקה ליניארית בין מרחבים ובסיסים מסוימים ניתן להתאים מטריצה מייצגת, בדיוק לפי הדרך שהראנו לעיל. באופן שקול, כל מטריצה כזו מייצגת בדיוק טרנספורמציה ליניארית מסוימת (בהינתן שני מרחבים ובסיסים), גם-כן לפי הדרך שהסברנו בה את הקשר בין המטריצה להעתקה.

מכאן, ישנו קשר חד-חד-ערכי ועל בין מטריצה לבין העתקה ליניארית (בהינתן מרחבים ובסיסים נותנים). קשר כזה של יחס חד-חד-ערכי ועל בין שני מרחבים וקטורים נקרא איזומורפיזם[18].

כעת, נניח שיש לנו 3 מ"ו: Y, U, V, ונניח שיש לנו שתי העתקות ליניאריות - $g:Y\to U,\ f:U\to V$.



אם כך, כעת אנו יכולים להתבונן ב- $f\circ g$ (f מורכב על g), כך שלכל $y\in Y$, $f\circ g(y)=f(g(y))$.

טענה: אם f,g העתקות ליניאריות, אז גם $f\circ g$ העתקה ליניארית.

הוכחה: 1) שימור חיבור- יהיו $y_1,y_2\in Y$. אזי, נוכיח כי $f\circ g(y_1+y_2)=f\circ g(y_1)+f\circ g(y_2)$ (שימור חיבור). נעבור שלב-שלב:

1. $f\circ g(y_1+y_2)=f(g(y_1+y_2))$ (לפי הגדרת ההרכבה)
2. $f(g(y_1+y_2))=f(g(y_1)+g(y_2))$ (לפי שימור חיבור של g)
3. $f(g(y_1)+g(y_2))=f(g(y_1))+f(g(y_2))$ (לפי שימור חיבור של f)
4. $f(g(y_1))+f(g(y_2))=f\circ g(y_1)+f\circ g(y_2)$ (לפי הגדרת ההרכבה)

בסה"כ קיבלנו כי $f\circ g(y_1+y_2)=f\circ g(y_1)+f\circ g(y_2)$, כלומר $f\circ g$ משמרת חיבור.

---

18 תיאור נפוץ לאיזומורפיזם בין שני מרחבים הוא ששני המרחבים הם 'אותו הדבר עד כדי שינוי שם'. המילה 'איזומורפיזם' מגיעה מיוונית – "איזו" (שווה) ו"מורפה" (מבנה). בנוסף, קשר חד-חד-ערכי (שאינו דווקא 'על') נקרא מונומורפיזם, וקשר שהינו על (אבל אין דווקא חד-חד-ערכי) נקרא אפימורפיזם.

באופן דומה נוכיח את שימור הכפל: בהינתן $y \in Y, c \in \mathbb{F}$, נראה כי $f \circ g(cy) = f(g(cy)) = f(cg(y)) = cf(g(y)) = cf \circ g(y)$ (כאשר המעבר בכל שלב לפי הסדר הוא בגלל הגדרת ההרכבה, ואז בגלל שימור הכפל של g, ואז לפי שימור הכפל של f, ולבסוף שוב הגדרת ההרכבה.

אז הראנו ש- $f \circ g$ משמרת חיבור וכפל (בהנחה ש-f ו-g בעצמם הן העתקות ליניאריות, כמובן) ומכאן $f \circ g$ היא העתקה ליניארית.

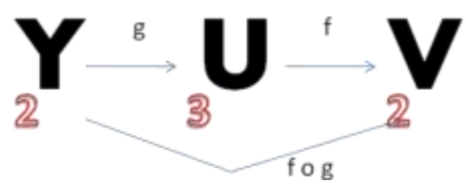
מה המשמעות של העתקה $f \circ g$? ניתן לה שם חדש, $h = f \circ g$, וכעת יש לנו העתקה h, שהיא למעשה ישירות מ-מ"ו Y למ"ו V, והיא מתבצעת ע"י ביצוע g, ועל התוצאה ביצוע f. כעת, כיצד נתאים מטריצה לייצוג של העתקה h?

ראינו קודם, כאמור, כיצד מטריצה יכולה לייצג העתקה ליניארית. אם כן, כעת ראינו שניתן להרכיב העתקות, ובכך להגיע לתצוגה יעילה מאוד של ההעתקה (מטריצה בודדת אשר מפרטת את פעולת ההעתקה כולה). אם כן, אנו יודעים כיצד ליצור את המטריצה המייצגת של העתקה[19] f ואת המטריצה של העתקה g. מה הקשר בין המטריצות האלו, לבין המטריצה אשר תייצג את ההעתקה המתקבלת מהרכבת העתקות אלו? כלומר, מה הקשר בין המטריצות המייצגות את g ואת f לבין המטריצה של h – האם נוכל להסיק מתוך המטריצות של f ושל g את המטריצה של h?

מסתבר שיש קשר הדוק, שבא לידי ביטוי דרך כפל מטריצות: המטריצה המייצגת של h – הרכבת f ו-g – היא המטריצה המתקבלת לאחר <u>כפל מטריצות</u> בין המטריצה של f למטריצה של g. כפל מטריצות היא פעולה מוגדרת היטב אך לא טריוויאלית (לא כופלים כל כניסה בעצמה, בשונה ממה שעושים בחיבור), ומיד נסביר אותה[20].

נגדיר F המטריצה המייצגת את f, ו-G המטריצה המייצגת את העתקה g, ונגדיר שנקרא למכפלתם FG=H, המטריצה המייצגת את $h = f \circ g$.

נתבונן כמו מקודם, במ"ו Y (ונניח כי מימדו 2), במ"ו U (ממימד 3) ובמ"ו V (גם כן ממימד 2). במקרה כזה, למטריצה G המייצגת את המעבר מ-Y ל-U יהיה סדר של 3*2, שכן היא צריכה להעביר 2 איברי בסיס (מ-Y) לתצוגה לפי 3 איברי בסיס (של U). ואילו למטריצה F, אשר מייצגת העתקה מ-U ל-V, יהיה סדר של 2*3, שכן היא מייצגת העתקה של 3 איברי בסיס (של U) לתצוגה לפי 2 איברי בסיס (של V).



[19] כזכור, "העתקה" ו"טרנספורמציה" הינן מילים שקולות בהקשרים אלו.

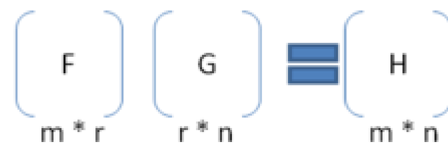
[20] ההוכחה מדוע כפל זה מייצג נכונה הרכבת העתקות הינה טכנית, ולא תוכח כאן. למתעניינים, ניתן למצוא את ההוכחה במקומות רבים באינטרנט, לדוגמא כאן: http://en.wikibooks.org/wiki/Linear_Algebra/Matrix_Multiplication במסמך מצוין זה ישנן גם הערות נוספות לגבי כפל מטריצות ודוגמאות רבות, אשר את חלקן נביא בגוף פרק זה של המסמך.

סדר הכפל הוא כדלקמן:

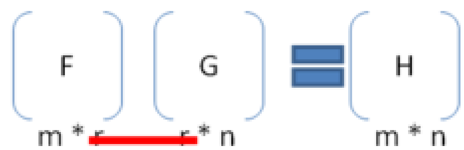
$$M_{f\circ g} = M_f * M_g$$

(כאשר M_f היא המטריצה המייצגת את העתקה f)[21]

מבחינת גודל, מטריצת התוצאה תהיה בעלת מספר שורות כמו המטריצה הראשונה, ומספר עמודות כמו המטריצה השנייה.

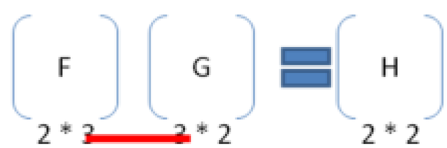


קל לזכור זאת, כי המימד ה"אמצעי" פשוט "מתבטל":



כמו כן נשים לב שבכפל מטריצות לרוב לא מסמנים בסימן כפל, אלא רק שמים את המטריצות בסמיכות.[22]

אם כן, בדוגמא שלנו, למטריצה h יהיה בסופו של דבר סדר של 2*2:



שזה הגיוני מאוד, כי אנו הולכים להעתיק ממרחב 2 מימדי, למרחב 2 מימדי (מ-Y ל-V). אנו כבר רואים את אחד החוקים החשובים בכפל מטריצות – מספר העמודות של המטריצה השמאלית, צריך להיות שקול למספר השורות של המטריצה הימנית. אחרת אין הגדרה לכפל בין המטריצות, וממילא הן לא יכולות לייצג הרכבה של העתקות, שהרי מימד מרחב היעד של ההעתקה הראשונה (שמספר השורות של המטריצה הימנית שקול לו) צריך להיות זהה למימד מרחב המקור

---

21 זאת משום שכפל (משמאל) של מטריצה בוקטור שקולה להפעלת הטרנספורמציה של אותו הוקטור, וכפל המטריצות שקול להרכבת הטרנספורמציות, כך שקודם מבצעים את הטרנספורמציה הראשונה (כופלים במטריצה שלה) ורק אז בשניה. נושא זה יודגם בהמשך.

22 גם סדר של מטריצות נהוג לעיתים קרובות לסמן “m x n” כדי לסמן "m על n", במקום עם סימן כפל, כמופיע במסמך זה. משיקולי קריאות, במסמך זה מופיע סימן כפל במקום סימן "x".

של ההעתקה השניה (כי זהו אותו המרחב כמו היעד של הראשונה, ומספר זה מיוצג ע"י מספר העמודות של המטריצה השמאלית).

משוידאנו את הגדלים הנכונים של F ושל G, מהי הדרך לכפול?

כפל מטריצות עובד כדלקמן (זהו נושא מבלבל, אז התרכזו). במטריצת התוצאה, האיבר בשורה i ובעמודה j, הוא הסכום המצטבר של כפל של איברי שורה i במטריצה השמאלית, באיברי עמודה j במטריצה הימנית.

נניח שמטריצה F (כלומר, המטריצה המייצגת את העתקה f לפי הבסיסים הנתונים) הינה $\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 4,5,6 \end{pmatrix}$ ומטריצה G הינה $\begin{pmatrix} 7,8 \\ 9,10 \\ 11,12 \end{pmatrix}$. נתבונן ב: $FG = \begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 4,5,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7,8 \\ 9,10 \\ 11,12 \end{pmatrix}$

נתחיל מהשורה הראשונה של F והעמודה הראשונה של G. נתקדם איבר-איבר (ימינה בשורה, למטה בעמודה), נכפול אותם, ונסכום. נקבל 1*7+2*9+3*11=58. כיוון שהשתמשנו בשורה הראשונה של F ובעמודה הראשונה של G, מספר זה יהיה בשורה הראשונה ובעמודה הראשונה של H:

H בינתיים: $\begin{pmatrix} 1*7+2*9+3*11=58, ? \\ ?, ? \end{pmatrix}$

כעת נחשב את הערך שיהיה בפינה הימנית העליונה של H – כלומר, בשורה הראשונה, בעמודה השניה. לפי החוק, זה יהיה הסכום המצטבר של מכפלת האיברים בשורה הראשונה של F, ובעמודה השנייה של G. כלומר: 1*8+2*10+3*12, סה"כ 64:

H בינתיים: $\begin{pmatrix} 1*7+2*9+3*11=58, & 1*8+2*10+3*12=64 \\ ?, ? \end{pmatrix}$

כעת נחשב את הערך בפינה השמאלית התחתונה – שורה שניה, עמודה ראשונה. על-פי החוק, זה יהיה הסכום המצטבר של מכפלת האיברים בשורה השניה של F (כזכור, <u>השורה</u> של התוצאה זהה לשורת המטריצה הראשונה) ובעמודה הראשונה של G (כזכור, העמודה זהה לעמודה של המטריצה השנייה).

כלומר: 4*7+5*9+6*11, סה"כ 139.

H בינתיים: $\begin{pmatrix} 1*7+2*9+3*11=58, & 1*8+2*10+3*12=64 \\ 4*7+5*9+6*11=139, ? \end{pmatrix}$

ובפינה הימנית התחתונה (שורה שניה, עמודה שניה) יהיה הסכום המצטבר של מכפלת האיברים בשורה השניה ב-F ובעמודה השניה ב-G, כלומר

.4*8+5*10+6*12=154

H לבסוף: $\begin{pmatrix} 1*7+2*9+3*11=58, & 1*8+2*10+3*12=64 \\ 4*7+5*9+6*11=139, & 4*8+5*10+6*12=154 \end{pmatrix}$

כלומר, סה"כ קיבלנו ש- $H=FG=\begin{pmatrix} 1,2,3 \\ 4,5,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7,8 \\ 9,10 \\ 11,12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 58,64 \\ 139,154 \end{pmatrix}$

ע"מ לבדוק את עצמנו, ניתן להיעזר במחשבוני מטריצות שקיימים ברשת, למשל כאן:

http://www.bluebit.gr/matrix-calculator/matrix_multiplication.aspx

בשורה התחתונה, מצאנו את H, המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה $h=f\circ g$.

נסיים עם מספר אבחנות חשובות מאוד לגבי כפל מטריצות:

1. כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי (כלומר, סדר הסוגריים לא משנה את התוצאה). לכל מטריצות A, B, C,

   מתקיים כי (A*B)*C = A * (B*C). עובדה זו מובאת לעת עתה ללא הוכחה. יש לשים לב, עם זאת, כי הכפל בין המטריצות מתאפשר רק אם מימדיהן מתאימים, כפי שהוסבר לעיל.

2. כפל מטריצות אינו קומוטטיבי (כלומר, סדר האיברים במכפלה כן משנה). ראשית, מלכתחילה ייתכן שניתן לכפול את המטריצות בסדר אחד אך לא בסדר אחר. לדוגמא, אם A היא מטריצה 2*3 (מגודל 2 על 3) ו-B מטריצה מגודל 3*4, אז ניתן לבצע A*B, אך לא ניתן לבצע B*A. יתרה מכך, גם אם ניתן להכפיל בשני הכיוונים, לא מובטח שהתוצאה תצא זהה. למשל, נתבונן ב- $A=\begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}$ וב- $B=\begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,0 \end{pmatrix}$. נשים לב כי: $AB=\begin{pmatrix} 1,1 \\ 1,1 \end{pmatrix}$, ואילו $BA=\begin{pmatrix} 2,0 \\ 0,0 \end{pmatrix}$ (תרגלו זאת בעצמכם, כדי לתרגל כפל מטריצות). אם כן – סדר המטריצות במכפלה הוא בעל משמעות, ומכאן כפי שהרגע למדנו, גם סדר הרכבת ההעתקות.

3. כפל בסקלר מתחלף עם כפל מטריצות – כלומר, לכל מטריצות A,B ולכל סקלר c, מתקיים כי c(AB)=(cA)B.

4. מטריצת היחידה – זוהי מטריצה אשר על האלכסון הראשי שלה מופיעה הספרה '1' ובכל מקום אחר מופיעים רק אפסים. מטריצה זו מיוצגת לרוב ע"י האות I.

$$I=\begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,1,0 \\ 0,0,1 \end{pmatrix}$$

   במקרה זה I הוא מסדר 3-על-3, אך יש מטריצת יחידה לכל מטריצה ריבועית (כלומר, בעלת אותו מספר שורות ועמודות). מטריצה זו מייצגת את העתקת הזהות, כלומר ההעתקה אשר שולחת כל איבר לעצמו. למרחב בעל בסיס עם n איברים (כלומר עם

מימד n) מתאימה העתקת זהות של n-על-n (מהסיבות אשר פורטו בפרק זה). בכפל מטריצות, העתקת הזהות מתחלפת עם כל מטריצה. כלומר, לכל מטריצה A מתקיים כי $IA=AI=1$.

הטכניקה הדרושה לכפל מטריצות היא מתעתעת ודורשת ניסיון ותרגול. ניתן לראות מספר דוגמאות נוספות לכפל מטריצות בלינקים הבאים, וכמובן ישנן דוגמאות רבות נוספות ברשת[23].

[23] סרטונים לדוגמא על כפל מטריצות:

- http://www.youtube.com/watch?v=XQY7C0qyA6o& - מטריצת 3*2 כפול מטריצת 2*3
- http://www.youtube.com/watch?v=0j4HZP2rFHk& - מטריצת 2*2 כפול מטריצת 2*2
- http://www.youtube.com/watch?v=N3WT8_TWDYs& - מטריצת 4*3 כפול מטריצת 3*2
- http://www.youtube.com/watch?v=sYlOjyPyX3g – 2 דוגמאות נוספות

בחיפוש בגוגל או יו-טיוב ניתן למצוא בקלות סרטונים רבים נוספים המדגימים כפל. כמו כן, כדאי להשתמש במחשבוני כפל מטריצות (אשר בחיפוש קל בגוגל ניתן למצוא) כדי לוודא את התוצאות.

17) מערכות של משוואות ליניאריות, דירוג מטריצות

הגענו כעת לנושא שמהווה חלק משמעותי מה'מוטיבציה' לאלגברה ליניארית, וגם בוודאי ייראה לכם מוכר: מערכות של משוואות ליניאריות. מערכת משוואות ליניארית היא מערכת משוואות מסוג $\begin{matrix} x+y=5 \\ 2x+3y=13 \end{matrix}$, אך לא, למשל, מסוג $\begin{matrix} x^2+y^2=5 \\ 2x^3+y^4=13 \end{matrix}$. כמו בדיון בנושא 'צירופים ליניאריים', גם כאן הכוונה למערכות משוואות אשר יש בהן רק גורמים 'ליניאריים' ('בלי חזקות').

אם כן, נתבונן במערכת המשוואות הכללית הבאה:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ &a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ &... \\ &a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=b_n \end{aligned}$$

יש לנו כאן מערכת של m משוואות ליניאריות עם n נעלמים. הנעלמים הם $x_1,...,x_n$, ועם מקדמים מסוג $a_{ij}\in\mathbb{F}$ (משדה כלשהו), ו'איברים חופשיים' $b_i\in\mathbb{F}$. "לפתור את המערכת" פירושו למצוא $s_1,s_2...,s_n\in\mathbb{F}$ כך שהצבה של s_i במקום x_i תגרום לשיוויון בין האגפים, ז"א

$a_{i1}s_1+a_{12}s_2+...+a_{1n}s_n=b_i$ (עבור i מ-1 עד m).

נשים לב שישנם שלושה מצבים אפשריים:

1. מערכת בלי פתרונות (למשל, למשוואה $0*x_1=1$ אין אף פיתרון)
2. מערכת עם פתרון יחיד (למשל, למשוואה $1*x_1=1$ יש פתרון אחד בלבד, x1=1)
3. מערכת עם הרבה פתרונות (למשל, למשוואה $0*x_1=0$ יש הרבה פתרונות – למעשה, אינסוף פתרונות [כאשר השדה אינסופי.]).

כעת נגדיר, כי 2 מערכות משוואות נקראות <u>שקולות</u> אם יש להן בדיוק את אותן הפתרונות.

נגדיר גם מונח בשם <u>מטריצת המקדמים</u>: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$ מסדר m*n. זוהי המטריצה אשר מכילה את המקדמים של איברי "x" (המשתנים) במשוואות הליניאריות, כאשר מקדמי המשתנים בכל משוואה מהווים שורה במטריצה.

הערה ותזכורת: נשים לב כי ההעתקה לבניית המטריצה הינה העתקה <u>ניצבת</u> להעתקה לבניית ה'מטריצה להעתקה ליניארית': בעת כתיבת מטריצה להעתקה ליניארית אנו בונים שורת מקדמים לפי טור, ואילו כאן אנו בונים לפי שורה.

נגדיר גם את <u>מטריצת המקדמים המורחבת</u>, אשר זהה מלבד העובדה שהיא כוללת גם את עמודת ה'איברים החופשיים': $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$.

נגדיר שלוש פעולות שניתן להפעיל על מערכת משוואות ליניארית:

1. כפל של משוואה i בסקלר c שונה מ-0 מהשדה.
2. נחליף את המשוואות i ו-j במקומות.
3. נכפיל משוואה i בסקלר c מהשדה, ונוסיף את התוצאה למשוואה j. (כלומר, במקום משוואה j תעמוד משוואה i*c+j).

טענה (אשר לא תוכח כאן): כל אחת מהפעולות האלו איננה משנה את הפתרונות אשר היו פותרים את המשוואה הקודמת, ומכאן גם אינה משנה את הפתרונות של מערכת המשוואות כולה. כלומר, כל פתרון של המערכת המקורית פותר את המערכת החדשה, ולהיפך.

כאמור, טענה זו לא תוכח כרגע, אך אינטואיטיבית ניתן לראות זאת: למשל, במערכת המשוואות $\begin{matrix} x+y=5 \\ 2x+3y=13 \end{matrix}$, כפל של משוואה מספר 1 בסקלר 3 יחזיר לנו את מערכת המשוואות השקולה $\begin{matrix} 3x+3y=15 \\ 2x+3y=13 \end{matrix}$. החלפת המשוואות במקומם תחזיר לנו את מערכת המשוואות $\begin{matrix} 2x+3y=13 \\ 3x+3y=15 \end{matrix}$, אשר בוודאי שקולה, וכעת נכפיל את המשוואה הראשונה (החדשה) במינוס 1 ונוסיפה למשוואה השנייה, ונקבל את $\begin{matrix} 2x+3y=13 \\ x=2 \end{matrix}$, אשר גם היא שקולה למערכת המשוואות המקורית.

כמובן, כאשר אנו מסתכלים על מטריצה כמייצגת מערכת משוואות (כזכור, ניתן להסתכל על מטריצה כמייצגת מערכת משוואות או העתקה ליניארית, אך בכל מקרה מטריצה היא 'מרובע עם מספרים'), כל אחת הפעולות אשר תיארנו לעיל (אשר מכונות לעיתים 'פעולות אלמנטאריות על מערכת משוואות/מטריצה') תשנה את המטריצה באופן זהה לדרך שבה תשנה את מערכת המשוואות, ומכאן נוכל להפעיל את הפעולות ישירות על המטריצה.

<u>דירוג מטריצות</u>

בעזרת שרשרת פעולות אלמנטאריות כפי שהוגדר לעיל, נוכל <u>לדרג</u> את המטריצה, ולהביא למצב נוח יותר וקל לפתרון מערכת המשוואות. מיד נסביר וניתן דוגמא:

נסתכל בדוגמא הבאה[24]. נניח ויש לנו את המטריצה $\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 6,7,8,9,10 \\ 11,12,13,14,15 \end{pmatrix}$. אנו יודעים כעת כי זוהי המטריצה המייצגת את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{aligned} 1*x_1+2*x_2+3*x_3+4*x_4&=5 \\ 6*x_1+7*x_2+8*x_3+9*x_4&=10 \\ 11*x_1+12*x_2+13*x_3+14*x_4&=15 \end{aligned}$$

כעת בעזרת פעולות אלמנטאריות, נשנה את מערכת המשוואות/המטריצה, כך שהפתרונות יישארו אותם הפתרונות.

ראשית נחסיר מהמשוואה השנייה 6 פעמים את המשוואה הראשונה (זוהי פעולה אלמנטארית מספר 3), ונסמן פעולה זו בקיצור $R_2 \to R_2 - 6*R_1$, כבא לומר "Row2 minus 6 times Row1". נקבל:

$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 0,-5,-10,-15,-20 \\ 11,12,13,14,15 \end{pmatrix}$. מטריצה זו כעת מייצגת מערכת משוואות אחרת, כמובן, אך כמו שאמרנו – זוהי מערכת משוואות שקולה, עם אותם הפתרונות. כעת נחסיר משורה שלוש 11 פעמים את שורה 1, כלומר $R_3 \to R_3 - 11*R_1$, ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 0,-5,-10,-15,-20 \\ 0,-10,-20,-30,-40 \end{pmatrix}.$$

כעת נבצע $R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$ (כלומר, נכפול את משוואה/שורה 2 במינוס חמישית. זוהי פעולה אלמנטארית מספר 1) ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 0,1,2,3,4 \\ 0,-10,-20,-30,-40 \end{pmatrix}$$

נבצע $R_3 \to -\frac{1}{10}R_3$ ונקבל

[24] נזכיר כי בפרק זה, כבכול הטקסט, אנו נכתוב לעיתים x_1 ולעיתים x1, והכוונה זהה.

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 0,1,2,3,4 \\ 0,1,2,3,4 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע $R_3 \to R_3 - R_2$ (פעולה מספר 3) ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 0,1,2,3,4 \\ 0,0,0,0,0 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע $R_1 \to R_1 - 2 * R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1,0,-1,-2,-3 \\ 0,1,2,3,4 \\ 0,0,0,0,0 \end{pmatrix}$$

כעת קיבלנו מטריצה אשר מכונה <u>מדורגת</u>.

הגדרה: מטריצה נקראית 'מדורגת' אם יש בתוכה עמודות 'סטנדרטיות' לפי הסדר במקומות $1 \le j_1 \le j_2 \le ... \le j_r$ ומתחת לקו המדרגות יש רק אפסים. נדגיש כי העמודות הסטנדרטיות לא חייבות להיות סמוכות. במקרה הנ'ל, נראה את קו המדרגות:

$$\begin{pmatrix} 1,0,-1,-2,-3 \\ 0,1,2,3,4 \\ 0,0,0,0,0 \end{pmatrix}$$

כאשר מצב כזה מתקיים במטריצה, נאמר שהמטריצה היא 'מדורגת'[25], ונגדיר את העמודות ה'סטנדרטיות' (אלו אשר נראות כמו וקטורים 'סטדנרטים', כלומר 1 במקום הסידורי של העמודה ומעליו ומתחתיו רק אפסים) כעמודות 'מיוחדות'. בדוגמא הנ'ל, עמודה 1 ו-2 (בלבד) הן עמודות 'מיוחדות').

כל מטריצה ניתן להביא למטריצה 'מדורגת' ע"י סדרת פעולות אלמנטאריות 1,2,3[26].

---

[25] לעיתים בספרות מכנים מטריצה כזו 'מדורגת קנונית', ומגדירים כי מספיק כי יתקיים רק תנאי האפסים מתחת לקו המדרגות בשביל שהמטריצה תוגדר כ'מדורגת'. אנו נשתמש בהגדרה לפיה נדרש כי גם מעל לספרה 1 בעמודות ה'מיוחדות' יהיו רק אפסים כדי שהמטריצה תהיה 'מדורגת'.

[26] משפט זה ניתן להוכיח ע"י אינדוקציה, אך לא נוכיח אותו כאן.

נציין שכפי שהתחלנו ממערכת משוואות, כיוון שביצענו רק פעולות אלמנטאריות – אשר כאמור שומרות את מע' המשוואות שקולה, ולכן הפתרונות שקולים – כעת הגענו למטריצה אשר מייצגת מע' משוואות שונה, והיא:

$$\begin{aligned}
1*x_1+0*x_2-1*x_3-2*x_4&=-3\\
0*x_1+1*x_2+2*x_3+3*x_4&=4\\
0*x_1+0*x_2+0*x_3+0*x_4&=0
\end{aligned}$$

נדגיש, כי למע' משוואות זו <u>אותם הפתרונות</u> כמו למע' המשוואות המקורית, וכבר קל יותר 'לפתור' אותה. אנו לא נפתור אותה עד הסוף.

טענה: אם העמודה האחרונה (זו שמתאימה לעמודת ה'איברים החופשיים') במטריצת המקדמים המורחבת היא <u>מיוחדת</u> אז למע' אין פתרונות <u>כלל</u>.

הוכחה: אם העמודה האחרונה הייתה מיוחדת, אזי הייתה לנו משוואה מסוג:

$$0*x_1+0*x_2+0*x_3+0*x_4=1$$

ברור שלמשוואה זו אין אף פיתרון, ומכאן למע' המשוואות כולה אין אף פתרון. כיוון שפתרונות מע' זו והמע' המקורית (שהייתה לנו לפני שהתחלנו לדרג) שקולים, אזי גם למע' המקורית אין אף פתרון. (נבהיר שזה אינו המצב עם מע' המשוואות אשר אנו דירגנו, כי לא הגענו למצב ההיפותטי המתואר).

טענה נוספת: אם העמודה האחרונה איננה מיוחדת, אז למע' <u>יש</u> פתרון (אחד או יותר). לא נוכיח זאת בצורה מפורשת, אך נמחיש ע"י דוגמא כיצד למצוא את הפתרונות.

נניח שהייתה לנו מע' של 4 משוואות עם 11 נעלמים, $x_1,...,x_{11}$. לאחר דירוג המטריצה, הגענו (נניח) למטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix}
0,0,1,2,5,0,-1,3,0,2,1\\
0,0,0,0,0,1,\ 1,2,0,1,2\\
0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,3\\
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
\end{pmatrix}$$

אשר קו המדרגות שלה נראה כדלקמן:

$$\begin{pmatrix}
0,0,1,2,5,0,-1,3,0,2,1\\
0,0,0,0,0,1,\ 1,2,0,1,2\\
0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,3\\
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
\end{pmatrix}$$

ונראה כי העמודות ה'מיוחדות' הן עמודות מספר 3, 6, ו-9:

$$\begin{pmatrix} 0,0,\boxed{1},2,5,\boxed{0},-1,3,\boxed{0},2,1 \\ 0,0,\boxed{0},0,0,\boxed{1},1,2,\boxed{0},1,2 \\ 0,0,\boxed{0},0,0,\boxed{0},0,0,\boxed{1},2,3 \\ 0,0,\boxed{0},0,0,\boxed{0},0,0,\boxed{0},0,0 \end{pmatrix}$$

כזכור, לאחר הדירוג המטריצה מייצגת מע' משוואות <u>שקולה</u> למקורית. המטריצה המדורגת הנ"ל מייצגת את מע' המשוואות

$$\begin{aligned} &x_3+2x_4+5x_5-x_7+3x_8+2x_{10}=1 \\ &x_6+x_7+2x_8+x_{10}=2 \\ &x_9+2x_{10}=3 \\ &0+...0=0 \end{aligned}$$

(ברור שהמשוואה הרביעית תמיד נפתרת (ע"י כל פתרון))

נשים לב כי הנעלמים המתאימים לעמודות ה'מיוחדות' – במקרה זה, $x_{3,}x_{6,}x_9$ - מופיעים במערכת כל אחד פעם אחת בלבד עם מקדם שונה מאפס. אם כן, כבר מצאנו פתרון למע' המשוואות כולה. נציב 0 בכל x מלבד $x_{3,}x_{6,}x_9$, ויישר לנו:

$$\begin{aligned} x_3+0+...+0&=1 \\ x_6+0+...+0&=2 \\ x_9+0&=3 \end{aligned}$$, כלומר $$\begin{aligned} x_3&=1 \\ x_6&=2 \\ x_9&=3 \end{aligned}$$ (ושאר ה-אים, כאמור, ידועים והינם 0).

נשים לב שאילו היינו מציבים <u>בכל ה-אים</u> 0, מע' המשוואות <u>לא</u> הייתה נפתרת. אך משבודדנו את האיברים ה'מיוחדים', ידענו כי אנו יכולים כעת להציב בשאר ה-אים אפס, ומיד ייצא לנו פתרון.

באופן כללי, הפתרונות תלויים ב (n-r) הפרמטרים ה'חופשיים' (כאשר r הוא מס' העמודות המיוחדות, כלומר מספר ה"מדרגות" בקו המדרגות, ו-n הוא כרגיל מספר הפרמטרים בכלל). לעיתים אין פרמטרים חופשיים – זה קורה כאשר n=r, ואז יש פתרון יחיד.

אם כן, ראינו כיצד כל מע' משוואות ניתן 'לדרג' עד לצורה 'מדורגת', ומשם לקבל מע' משוואות שקולה, אשר ממנה קל הרבה יותר לראות האם יש פתרונות בכלל, ואם כן, אזי למצוא פתרון.

<u>טכניקת דירוג מטריצות</u>

טכניקת דירוג מטריצות נלמדת בתרגולים באוניברסיטה, ניתנת להשגה באינטרנט, והינה ברובה מחוץ להיקף מסמך זה. עם זאת, נציג להלן את עיקרי השיטה לשימוש בצורה הקנונית של מטריצה כדי למצוא את הפתרונות למערכת משוואות (בהנחה שיש לה פתרונות כמובן). ניתן לעשות זאת באופן הבא:

x_j ייקרא משתנה מוביל (או תלוי), אם באחת השורות במטריצה הקנונית, האיבר הראשון ששונה מאפס נמצא בעמודה j. כל שאר המשתנים ייקראו חופשיים.

עבור כל משוואה (כלומר שורה במטריצה) שאינה משוואת ה 0, נשאיר באגף אחד את המשתנה המוביל (התלוי), ונעביר את כל שאר המשתנים (שהם כולם חופשיים, וזה בזכות הצורה הקנונית: עבור כל עמודה שמייצגת משתנה מוביל, יש 0 בכל השורות חוץ משורה אחת, אותה הוא מוביל).

עכשיו אפשר לתת כל ערך שנרצה לכל אחד מהמשתנים החופשיים (לכן הם נקראים כך), ומכל המשוואות שכתבנו לגבי המשתנים המובילים, נקבל מהו הערך שצריך להיות להם (לכן הם נקראים גם תלויים).

גישה זו מוכיחה, מלבד קיום פתרונות, את עניין דרגת החופש.

הערה לגבי הדירוג: אנשים מסתבכים לעיתים עם נושא הדירוג, והולכים במעגלים בנסיון לדרג מטריצה (קושי זה צץ במקרים דומים למקרה שבו יש 0 באיבר הראשון בשורה הראשונה, ויש איברים שונים מ 0 מתחת לאיבר זה. אנשים עושים לפעמים נכון את השלב הראשון, ודואגים לכך שבעמודה הראשונה כל האיברים שמתחת לאיבר הראשון יהיו שווים לאפס, אך בהמשך מנסים להשתמש בשורה הראשונה כדי לאפס איבר כלשהו, וכך משבשים את תהליך הדירוג). לשם כך ניתן אלגוריתם כללי לדירוג (קנוני):

בשלב ראשון:
התמקד בעמודה הראשונה שאינה עמודת אפסים. דאג לכך (באמצעות החלפת שורות במקרה הצורך או לשם נוחות) שהשורה הראשונה תהיה כזו שאיברה הראשון בעמודה בה מתמקדים שונה מ 0. עתה אפס את כל האיברים שמתחת לאיבר זה (בשימוש בפעולה האלמנטרית השלישית).

עתה המשך באותו אופן תוך התעלמות מוחלטת מהשורה הראשונה (כאילו מנסים לדרג את המטריצה המתקבלת ממחיקה השורה הראשונה).

אם לאחר התעלמות מהשורה הראשונה, יש רק שורות אפסים (או יש רק שורה אחת), סיימת וקיבלת מטריצה מדורגת (לא קנונית).

כדי לקבל מטריצה קנונית:
לכל שורה שונה מאפס: הכפל בסקלר מתאים (במקרה הצורך) כדי לדאוג לכך שהאיבר המוביל (הראשון ששונה מ 0) בשורה יהיה 1. עתה אפס את כל האיברים שמעליו (אלו שמתחתיו כבר שווים ל0), בעזרת הפעולה האלמנטרית השלישית.

הערה לסיום: באופן כללי, אם אין פרמטרים חופשיים, אז בהכרח יש פתרון (כי העמודה האחרונה לא יכולה להיות מיוחדת).

18) צורה מטריציאלית של מערכת משוואות ליניארית

ראינו את מע' המשוואות הכללית, $\begin{matrix} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=b_n \end{matrix}$. נשים לב, כי בעזרת מה שלמדנו על כפל מטריצות, נוכל להביע זאת גם בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},...,a_{1n} \\ a_{21},a_{22},...,a_{2n} \\ ... \\ a_{m1},a_{m2},...a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

וזאת משום שאם נפתח את הכפל, נקבל בדיוק את הביטוי

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...,+a_{2n}x_n \\ ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

אם כן, אנו רואים שאת מערכת המשוואות הזו ניתן גם בצורת משוואה בודדת: $Ax=b$, כאשר A היא מטריצת המקדמים של המשוואות, x היא עמודת הנעלמים אותם אנו מחפשים, ו-b היא עמודת האיברים החופשיים. עבור משוואה כזו אנו מחפשים פיתרון $s=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ ... \\ s_n \end{pmatrix}$ אשר תקיים את המשוואה (כלומר תקיים $As=b$). נשים לב כי על x (כמשתנה) ו-s (כפיתרון) למעשה ניתן להסתכל כוקטור ששייך למרחב וקטורי $\mathbb{F}^n$ [27]. אם כן, אנו מחפשים וקטור ששייך ל-$\mathbb{F}^n$, שכפל של A עליו מחזיר את הוקטור b – שעליו ניתן להסתכל כעל וקטור ששייך ל-$\mathbb{F}^m$. כיוון שכזכור הראנו כיצד ניתן להסתכל על כפל של מטריצה כביטוי של העתקה ליניארית, אנו למעשה מחפשים וקטור ב-$\mathbb{F}^n$, אשר כאשר נפעיל עליו את ההעתקה אשר מטריצת הייצוג שלה היא A, נקבל את הוקטור b ב-$\mathbb{F}^m$.

[27] $\mathbb{F}^n$ הוא מרחב וקטורי כלשהו של וקטורים בעלי n קואורדינאטות, אשר כל אחד מהם הוא מהשדה $\mathbb{F}$. למשל, $\mathbb{R}^2$ הוא דוגמא פרטית למ"ו מסוג $\mathbb{F}^n$, וכך גם $\mathbb{R}^3$, וכך גם $\mathbb{C}^5$. מכיוון שכל מה שנאמר נכון לגבי כל מרחב וקטורי שכזה, אנו מתייחסים בכלליות למרחב וקטורים כלשהו, $\mathbb{F}^n$.

ננסח זאת במילים אחרות: נסתכל על המשוואה (של מטריצות) שהגדרנו $Ax=b$. נתאים ל-A העתקה ליניארית (כפי שראינו קודם, כל מטריצה מייצגת העתקה מסוימת ביחס לבסיסים כלשהם) בין מ"ו:

$f_A : c \mapsto Ac$,

$f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$

כלומר ההעתקה הזו (f_A , ההעתקה אשר מיוצגת ע"י מטריצה A) מעבירה איבר כללי c[28] ל-'A כפול c' (כלומר מכפילה משמאל ב-c). ברמת התחום והטווח, ההעתקה מעבירה מ-$\mathbb{F}^n$ ל-$\mathbb{F}^m$ (נזכיר, כי m הגיע ממספר המשוואות שהיו לנו, ו-n ממספר הנעלמים).

ניתן דוגמא:

נסתכל על מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=20\\ 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4&=40\\ 9x_1+10x_2+11x_3+12x_4&=60 \end{aligned}$$

בצורה מטריציאלית, מע' המשוואות תיראה כך:

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 5,6,7,8 \\ 9,10,11,12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

המטריצה (נכנה אותה A) מייצגת העתקה ליניארית (נכנה אותה f_A) אשר פועלת $f_A : \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^3$.

למשל, נסתכל כיצד ההעתקה פועלת על הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$:

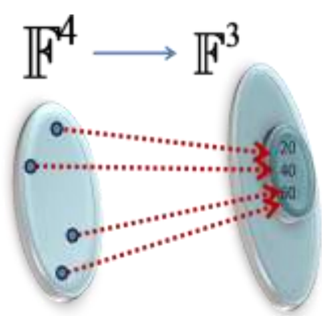
[28] נזכיר, כי האיבר הכללי c נראה מתצורת $\mathbb{F}^n$, כלומר $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\5,6,7,8\\9,10,11,12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\13\\21\end{pmatrix}$$

ואילו על הוקטור $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ היא פועלת כך:

$$\begin{pmatrix}1,2,3,4\\5,6,7,8\\9,10,11,12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\17\\29\end{pmatrix}$$

גרפית, ניתן לדמיין כך את פעולת f_A - כל וקטור (המיוצג ע"י 4 'קואורדינטות') מתוך מרחב $\mathbb{F}^4$ נשלח למרחב $\mathbb{F}^3$, ואנו מחפשים את הוקטור המסוים אשר ישלח בדיוק לוקטור $\begin{pmatrix}20\\40\\60\end{pmatrix}$ ב- $\mathbb{F}^3$.



$\mathbb{F}^n$

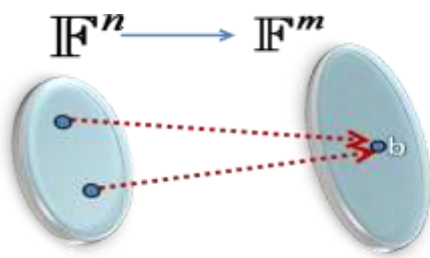
שזה שקול ללומר שאנו מחפשים את $\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{pmatrix}$ אשר יקיים המשוואה $\begin{pmatrix}20\\40\\60\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{pmatrix}$.

אם כן, ה<u>פתרונות</u> למערכת המשוואות הינם ה<u>מקורות</u> של האיבר בטווח, מתוך האיברים ב<u>תחום</u>.

בדוגמא זו, איבר היעד היה $\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$, הטווח היה $\mathbb{F}^3$, והתחום היה $\mathbb{F}^4$.

נציין, כי העתקה f_A הינה העתקה ליניארית, כלומר משמרת חיבור וכפל.[29]

המסקנה שהגענו אליה, אם כן, היא שעבור משוואה $Ax = b$, אוסף כל הפתרונות הוא אוסף המקורות של $b \in \mathbb{F}^m$, ביחס להעתקה ליניארית $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $f_A : c \mapsto Ac$.



בפרט, במינוח שלמדנו, למערכת $Ax = b$ אין פתרונות, אמ"מ $b \notin \mathrm{Im}(f_A)$. זאת, כי אם b לא שייך לתמונה של ההעתקה, אין אף מקור שמביא אל הפתרון. ואם להיפך – כלומר אם b כן שייך לתמונה – זה בדיוק אומר שיש מקור שמביא ליעד, קרי, יש פיתרון למערכת! שהרי,

$$\mathrm{Im}(f_A) = \{d \in \mathbb{F}^m \mid exists\ c \in \mathbb{F}^n\ so\ that\ f_A(c) = d\}$$

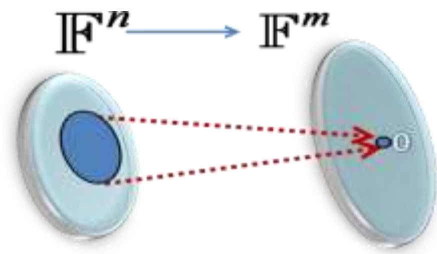
בפרט, אם נניח ש- $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ - אזי יש לנו מה שנקרא <u>מערכת הומוגנית</u> - מע' משוואות אשר שווה כולה לאפס, כלומר

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n &= 0 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}.$$

נתבונן בהמחשה גרפית:

---

[29] לא נוכיח זאת כאן, אך אין זו הוכחה קשה. נסו זאת בעצמכם, ע"י כפל של מטריצה A כללית בוקטורים – הראו שימור חיבור וכפל.



אם כן, אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא בדיוק $\ker(f_A)$ - האיברים אשר ההעתקה שולחת לאפס. כפי שאנו יודעים (מוכיחים בנפרד), ker הוא תת-מ"ו. אז כעת אנו יודעים שאוסף הפתרונות למערכת המשוואות הוא תת-מרחב וקטורי! כלומר, הוא סגור לחיבור וסגור לכפל בסקלר.

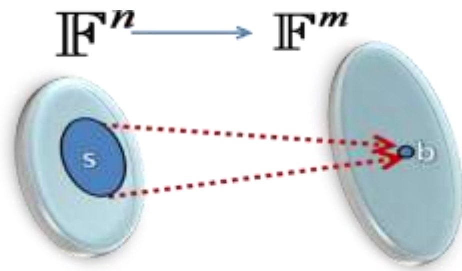
זוהי מסקנה מעניינת למדי – נמחיש אותה ע"י דוגמא קלה.

נתבונן במערכת המשוואות הבאה:

$\begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+z=0 \\ 2y+z=0 \end{matrix}$. נראה כי פתרון אפשרי אחד הוא $\begin{matrix} x=-1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{matrix}$, או בתצוגה וקטורית - $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. כיוון שזוהי מע' הומוגנית, וכפי שאמרנו אוסף הפתרונות מהווים תת-מרחב וקטורי, אזי הוא סגור לכפל, כלומר גם $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$*2 צריך להיות פיתרון. ואכן, $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ גם הוא פיתרון. אוסף הפתרונות, כמרחב וקטורי, סגור גם לחיבור, ואכן, גם $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא פיתרון למערכת המשוואות.

אם כן, נבהיר לאילו מסקנות הגענו עתה:

בהינתן מערכת משוואות $Ax=b$, נרצה לפתור ע"י מציאת s אשר יקיים $As=b$, כאשר s עמודה של פתרונות (שקול לפתרון מטריציאלי).במקום לפתור את מע' המשוואות ישירות, נבנה העתקה ליניארית $f_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$, $f:c\mapsto Ac$. כעת, יש לנו מצב אשר ניתן להמחישו כך:



כזכור, עמודה 'פותרת' אם היא מקיימת ש- $f_A(s)=As=b$.

אוסף כל הפתרונות של $Ax=b$ הוא אוסף כל המקורות של b ביחס להעתקה הליניארית f_A מ-$\mathbb{F}^n$ ל-$\mathbb{F}^m$.

<u>אנו נסמן את אוסף המקורות הזה כ-</u>$f_A^{-1}(b)$[30], אשר משמעותו $f_A^{-1}=\{c\in\mathbb{F}^n \mid f_A(c)=b\}$.

הערה חשובה: אם b לא שייך ל-$\mathrm{Im}(f_A)$, אז אין פתרונות. במקרה פרטי של <u>מערכת הומוגנית</u> (כלומר b הוא עמודת אפסים בלבד), תמיד יש פתרונות ואוסף כל הפתרונות הוא $\ker(f_A)$.

$$f_A^{-1}(0)=\{c\in\mathbb{F}^n \mid f_A(c)=0_{\mathbb{F}^m}\}$$

(זאת כי לכל הפחות קיים ה'פיתרון הטריוויאלי' – שבו כל המשתנים ערכם 0).

מאידך, אם $b\neq 0_{\mathbb{F}^m}$(מערכת לא הומוגנית), אז אוסף כל הפתרונות $f_A^{-1}(b)$ <u>איננו</u> תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$, כי $A*0=0\neq b$ איננו פיתרון של המערכת $Ax=b$. כלומר, $0_{\mathbb{F}^n}\notin f_A^{-1}(b)$ - אפס אינו נמצא בתוך קבוצת המקורות-הפתרונות, ואם ה-0 לא מוכל בפתרונות אז הם אינם תת-מרחב[31].

---

[30] ונבהיר, כי אנו משתמשים בזה כ<u>סימון</u>, למרות שייתכן שההעתקה עצמה איננה חח"ע ועל, כלומר אין לה העתקה הופכית (אשר לרוב מסומנת כך).

[31] כי כזכור, כל תת-מרחב חייב להכיל את וקטור האפס.

אמנם, נניח שיש לנו פתרון ספיציפי. נקרא לו $c_0 \in \mathbb{F}^n$, אשר מהווה כאמור פתרון למע' המשוואות $Ax=b$. כלומר, $Ac_0=b$. במצב כזה,

$$f_A^{-1}(b) = c_0 + \ker(f_A)$$ [32]

ניתן להבין אינטואיטיבית כיצד מוסיפים וקטור לתת-מרחב, אך נגדיר זאת במדויק:

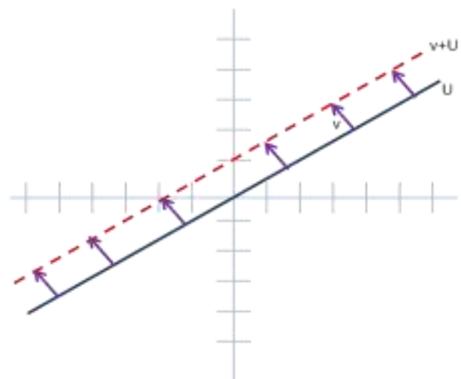
אם V מ"ו מעל שדה F, ו-A,B תת-קבוצות מוכלות ב-V (למשל, תתי-מרחבים), אזי $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}\subseteq V$.

בפרט, אם $A=\{a_o\}$ (קבוצה המכילה איבר בודד), אז נסמן

$$A+B=\{a_o+b\}=\{a_0+b \mid b\in B\}$$

במילים, תוצאת החיבור היא הוקטור ועוד כל איבר כלשהו מהקבוצה.

לדוגמא, כזכור הראנו בעבר כי במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$, ישר העובר דרך ראשית הצירים מהווה תת-מרחב וקטורי. נסתכל על הישר העובר דרך ראשית הצירים (כלומר על תת-המרחב) בשם U, ונוסיף לו וקטור v.



הקו הכחול-כהה ממחיש את תת המרחב U. נראה שבהינתן וקטורים שונים ב-U, אם מחברים את v (וקטור קבוע, אשר מיוצג ע"י החץ הסגול במקומות שונים בהם אפשר להוסיף אותו לוקטור כלשהו בתת המרחב U) מגיעים ל-v+U. כלומר, ניתן להגיע לכל וקטור ב-v+U דרך וקטור מסוים ב-U ועוד הוקטור הקבוע v. בסה"כ מקבלים קו ישר שמקביל ל-U, אבל עובר דרך הקצה של v.

ניתן לתופעה זו שם. אם $U\subseteq V$ תת-מ"ו, ווקטור $v\in V$, אזי הקבוצה v+U נקראת <u>ישרייה</u> או <u>תת-מרחב-אפיני</u>.

אם נגדיר תת-מרחב אפיני / ישרייה $v+U$, אזי תת-המרחב U נקרא תת-המרחב המכוון. כפי שנוכיח בפרק המשפטים, יש רק תת-מרחב אחד שאפשר 'להזיז' אותו כדי לקבל תת-מרחב אחר; כלומר, רק תת-מרחב 'מקורי' אחד לתת-המרחב האפיני. אינטואיטיבית זה די ברור – כמו במקרה

[32] עובדה זו הינה עובדה חשובה, ותוכח בהמשך, בשלב המשפטים וההוכחות. ודאו כי אתם מבינים את משמעותה.

של הקו העובר דרך ראשית הצירים, רק קו אחד נוכל לחבר אליו את v כדי להגיע לקו המסוים השני.

מכאן, נגדיר גם את מימד תת-המרחב האפיני למימד תת-המרחב המכוון, כלומר $\dim_f (v+U) = \dim_f U$.

20) דרגה / RANK של מטריצה/העתקה

כעת, נחזור וניזכר שאנו מדברים על העתקה $f_A:\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$.

ניזכר שציינו (ונוכיח במשפט המימדים) כי תמיד $\dim_F \ker f_A + \dim_F \operatorname{Im} f_A = \dim_F \mathbb{F}^n = n$, ומכאן אם נעביר אגף, נקבל כי

$\dim_F \ker f_A = \dim_F F^n - \dim_F \operatorname{Im} f_A = n - \dim_F f_A$.[33]

כפי שנוכיח במשפט,

$\operatorname{Im} f_A = Sp(columns\, of\; matrix\; A) = Sp(a_{*1},...,a_{*n})$.

מכאן,

$$\dim_F(c_0+\ker f_A) = \dim_F \ker f_A = n - \dim \operatorname{Im} f_A = n - \dim_F Sp(a_{*1},...,a_{*n})$$

<u>במילים:</u> המימד של תת-מרחב אפיני של פתרונות של מערכת משוואות $Ax=b$ (בתנאי שקיים פתרון ספיציפי c_0) הוא מספר הנעלמים n פחות המימד של תת-המרחב של $\mathbb{F}^m$ שנפרס ע"י העמודות של מטריצת המקדמים A.

אנו נגדיר כעת:

ה<u>דרגה</u> של מטריצה A לפי העמודות = $rank_C(A) = \dim_F Sp(a_{*1},...,a_{*n})$.[34] ומכאן:

$$\dim(c_0+\ker f_A) = n - rank_C(A)$$

ניתן דוגמא.

אם $A=\begin{pmatrix}1,2,3,4\\5,6,7,8\\9,10,11,12\end{pmatrix}$, מה הוא ה-rank לפי העמודות? זהו המימד של ספאן העמודות. נתבונן בספאן העמודות:

$$Sp(\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{F}^3 .$$

[33] נזכיר כי n הוא מספר הנעלמים במע' המשוואות. נזכיר גם כי בטקסט זה, אין הבדל בין F לבין $\mathbb{F}$ - השני הוא רק דרך יפה יותר לכתוב זאת. עם זאת, יש כמובן הבדל בין F – הסימון המקובל לשדה – לבין f ו- f , אשר הינם הסימון המקובל לפונקציה ווהעתקה.

[34] ה-C מציין, 'לפי העמודות'.

המימד של ספאן העמודות כאן יכול להיות <u>מקסימום 3</u>. זאת, כי הם כולם מוכלים ב- $\mathbb{F}^3$: באופן כללי במ"ו $\mathbb{F}^n$ יש n איברי בסיס. חשבו, למשל, על הבסיס הסטנדרטי ($e_1...,e_n$) – קל לראות כי הוא פורש את כל המרחב $\mathbb{F}^n$. כפי שציינו לעיל ללא הוכחה, עבור מ"ו נתון גודל כל הבסיסים הוא זהה. קרי, כיוון ש-n האיברים של הבסיס הסטנדרטי פורסים את $\mathbb{F}^n$, גודלו של כל בסיס יהיה בגודל n, תמיד.

דרך אחרת לראות זאת היא שאם הבסיס מוכל מ-n איברים, וכמובן שהבסיס על-פי הגדרה פורס את כל המרחב, אזי לא ייתכן שיש יותר מ-n איברים בלתי-תלויים-ליניארית במרחב. כל אחת מטענות אלו <u>מוכחת</u> באמצעות משפט בחלק על המשפטים, אך חשוב להבין זאת גם כמכלול.

מכאן, שמתוך 4 האיברים בספאן העמודות של A, מקסימום יש 3 שהינם בלתי-תלויים-ליניארית, והרביעי תלוי ליניארית בשלושת האחרים.

ואכן, נראה כי

$\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}$, וכן $\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix}$, אז האיברים $\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix}$ לא תורמים ואינם משנים את הספאן. מכאן,

$$Sp(\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\7\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix})=Sp(\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix})$$

שני האיברים בספאן החדש הינם בת"ל (בדקו זאת והוכיחו זאת בעצמכם, כתרגול). מכאן – מימד ספאן העמודות של A הינו 2, ומכאן $rank_C A=2$.

נתבונן כעת בדרגת <u>השורות</u> של A, אשר תוגדר באופן דומה ($rank_R A=\dim_F Sp(A's\ rows)$). כלומר, המימד של ספאן השורות של A.

נתבונן בספאן השורות:

$$Sp((1,2,3,4),(5,6,7,8),(9,10,11,12))$$

ישר נראה כי

$$(9,10,11,12)=2(5,6,7,8)-(1,2,3,4)$$

כלומר איבר זה תלוי ליניארית בשניים האחרים, אז איננו תורם לספאן. כלומר,

$$Sp((1,2,3,4),(5,6,7,8),(9,10,11,12))=Sp((1,2,3,4),(5,6,7,8))$$

ושני האיברים האחרונים הינם בת"ל, כלומר מימד ספאן השורות הינו 2, ומכאן זוהי גם 'דרגת' המטריצה לפי השורות.

ראינו כי דרגת השורות ודרגת העמודות יצאו זהות. אין זה מקרה – כפי שנוכיח במשפט בהמשך, דרגת השורות והעמודות <u>תמיד</u> זהות. לכל מטריצה A, $rank_C(A) = rank_R(A)$, ומכאן מעתה נאמר פשוט $rank(A)$.

כעת, לאחר שהראנו כי מימד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות, נקשר זאת למערכות משוואות.

ניתן לראות כי פעולות שורה אלמנטריות אינן משנות את מרחב השורה של מטריצה. לכן מימד מרחב השורה של מטריצה כלשהי שווה למימד מרחב השורה של הצורה הקנונית שלה. מכאן, שדרגת המטריצה שווה למספר האיברים המובילים (=מספר העמודות המיוחדות, לא כולל עמודת הפתרונות), כי שורות אלו הן כמובן פורשות (כל שאר השורות הן 0), וכן בלתי תלויות. (אם ננסה לקחת צירוף לינארי שלהן ששווה לאפס, בזכות העובדה שבכל עמודה מיוחדת יש בדיוק איבר אחד שונה מ 0, וכדי לאפס איבר זה נצטרך להכפיל את השורה ב 0, נקבל שצירוף זה הוא הטריוויאלי).

כפי שכתבנו בתחילת הפרק, וכן לפי השקילות בין שתי ההגדרות לדרגת מטריצה, מקבלים שמימד ישריית הפתרונות (במידה וזו אינה ריקה) שווה למספר הנעלמים פחות מספר הנעלמים המובילים (או מיוחדים).

תוצאה זו מתקבלת גם ישירות לפי הצורה הקנונית של מטריצה, ולפי ההסבר על מציאת פתרונות מצורה זו:

ניתן לקבל n-r פתרונות בלתי תלויים למערכת ההומוגנית באופן הבא:

לכל אחד מהמשתנים החופשיים נתאים פתרון בו משתנה זה שווה ל1 כל שאר המשתנים החופשיים שווים ל 0, והמשתנים התלויים מתקבלים לפי המשוואות שלהם. (מהסברים קודמים, אכן ניתן לקבל פתרונות כאלה). קל לראות כי אלו פתרונות בת"ל (כל מקדם בצירוף לינארי שיאפס אותם, יהיה חייב להיות 0 – בדומה למקרה של בסיס סטנדרטי).

וכן קל לראות כי יש פרישה של כל הפתרונות ההומוגנים (בהינתן פתרון מסויים, נוכל להציגו כצירוף לינארי של הפתרונות הנ"ל, אם נביט רק על האיברים התלויים (ונקבל מצב זהה למצב של בסיס סטנדרטי), צירוף זה ייתן את הפתרון הנתון, מאחר ובהינתן ערכי המשתנים החופשיים, ערכי המשתנים התלויים נקבעים ביחידות).

מכאן שמימד מרחב הפתרונות ההומוגנים הוא n-r.

(כתב: אסף כץ.)

יהי V מ"ו מעל שדה F.

קבוצת וקטורים $B\subset V$ תיקרא בסיס אם היא בת"ל מקסימלית.

אף על פי שאפשר להראות שכל הבסיסים למרחב וקטורי בעלי אותה העוצמה, אין יחידות בבחירת הבסיס וניתן לבחור הרבה בסיסים שונים.

דוגמא - בהינתן בסיס של וקטורים $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ מעל $\mathbb{R}$, ניתן לקחת בתור בסיס את $B'=\{2v_1,\dots,2v_n\}$.

דוגמא - אם נחשוב על $\mathbb{R}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$, אז בסיס אחד אפשרי יהיה הבסיס הסטנדרטי - $B_1=\{(1,0),(0,1)\}$, ואילו אפשר לקחת לדוגמא בסיס אחר - $B_2=\{(1,0),(1,1)\}$.

במקרים רבים, אנחנו נעדיף בסיסים "אחרים" על פני הבסיס הסטנדרטי, ממספר סיבות שחורגות מהקורס הזה, למשל למרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2 מעל $\mathbb{R}$ על הקטע $[-1,1]$ נעדיף לקחת את המערכת של פולינומי לג'נדר - $B=\{P_0,P_1,P_2\}$ באשר $P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{3}(3x^2-1)$, מסיבות הקשורות לתורת הקירובים.

המטרה שלנו היא להבין כיצד וקטור, שמתואר ע"י בסיס B_1 למרחב שלנו, יראה כאשר נתאר את המרחב ע"י בסיס B_2.

תזכורת - תיאור וקטור ע"י בסיס.

בהינתן בסיס $B_1=\{v_1,\dots,v_n\}$, הוקטור $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)$ הוא בעצם תיאור של הקומבינציה הלינארית $\bar{a}=a_1\overline{v_1}+\cdots+a_n\overline{v_n}$.

יהי B_2 בסיס אחר למרחב $B_2=\{u_1,\dots,u_n\}$, V.

נגדיר את הצגה של v_i לפי הבסיס B_2 להיות $v_i=\sum_j b_{j,i}\overline{u_j}$ ההצגה הזאת קיימת ויחידה מכך ש-B_1 בסיס.

נגדיר את מטריצת מעבר הבסיס בין B_1 ל- B_2 להיות $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & & b_{n,n} \end{pmatrix}$.

מה המשמעות של המטריצה הזו? המטריצה הזו לוקחת וקטור v בהצגה לפני בסיס B_1 ומחזירה וקטור u שהוא ההצגה של v לפי בסיס B_2.

דוגמא –

$$[T]_{B_1}^{B_2} v_i = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i,1} \\ \vdots \\ b_{i,n} \end{pmatrix} = \sum_j b_{j,i} \overline{u_j}$$

, שזה בדיוק היה הפיתוח של v_i לפי הבסיס B_2.

מאחר שכפל מטריצות שומר על חיבור וקטורים וכפל בסקלר, החישוב למעלה יהיה נכון לכל וקטור כללי במרחב.

דוגמא - נרצה להביע את הוקטור $P(x) = x^2 + x + 3$ לפי בסיס לג'נדר שהוגדר למעלה.

נחשב את מטריצת המעבר מהבסיס $B = \{1, x, x^2\}$ לבסיס לג'נדר $B_L = \left\{1, x, \frac{1}{3}(3x^2 - 1)\right\}$.

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot \frac{1}{3}(3x^2 - 1)$$

ולכן נקבל את מטריצת המעבר הבאה -

$$[T]_B^{B_L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נבדוק את החישוב -

$$[T]_B^{B_L} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{10}{3} \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 1 P_2 = \frac{10}{3} \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot \frac{1}{3}(3x^2 - 1) = x^2 + x + 3$$

כעת נתייחס ל- $[T]_{B_1}^{B_2}$ כהעתקה לינארית.

ברור ש- $[T]_{B_1}^{B_2}$ חד-חד ערכית, כתוצאה מיחידות הפיתוח לפי בסיס. ברור ש- $[T]_{B_1}^{B_2}$ על, מאחר שבסיס הוא קבוצה פורשת.

לכן $[T]_{B_1}^{B_2}$ היא העתקה הפיכה. ההעתקה ההפיכה, הופכת את פעולת המעבר מבסיס B_1 לבסיס B_2, כלומר היא שווה ל- $\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}=[T]_{B_2}^{B_1}$. ע"פ ההגדרה של $[T]_{B_2}^{B_1}$.

כעת, עוד צורת הסתכלות:

יהי T העתקה לינארית הפיכה.

למה: T מעבירה בסיס לבסיס.

הוכחה: יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס.

נטען ראשית כי $T(B)$ היא בת"ל.

נניח שלא, כלומר יש סקלרים $\{\alpha_i\}$ כך ש- $\sum_i \alpha_i T v_i=0$ כך שלא כל ה- α_i שווים לאפס.

מאחר ש-T העתקה לינארית, נקבל כי $T\left(\sum_i \alpha_i v_i\right)=0$.

מכך ש-T הפיכה, היא חח"ע, ולכן $\sum_i \alpha_i v_i=0$, וזאת סתירה להנחה ש-B היה בסיס.

כעת נטען כי $T(B)$ קבוצה פורשת.

T העתקה על, כלומר לכל $u\in V$ יש $v\in V$ כך ש- $Tv=u$.

נביע את v ע"י הבסיס B, $v=\sum_i \alpha_i v_i$., אז מתקיים $u=Tv=T\left(\sum_i \alpha_i v_i\right)=\sum_i \alpha_i T v_i$. כלומר u ניתן להבעה ע"י $T(B)$, ולכן $T(B)$ פורשת.

בסה"כ, $T(B)$ מהווה בסיס בפני עצמה. מ.ש.ל.

מהלמה הקודמת, אם B בסיס כלשהו, ו-T העתקה לינארית הפיכה, אזי $T(B)$ גם כן בסיס אחר של המרחב.

נניח כעת ש-B הוא הבסיס הסטנדרטי - $B=\{e_1,\dots,e_n\}$, אז ניתן להתייחס ל-T כמטריצת המעבר בין הבסיס הסטנדרטי ל- $T(B)$.

אם $T=\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$, אז $Te_i=c_i$, כלומר $T(B)=\{c_1,\dots,c_n\}$.

ולכן יש לנו זיהוי בין העתקות לינאריות הפיכות, ובין מעבר בין הבסיס הסטנדרטי לבסיסים אחרים של המרחב.

בנוסף, נניח כי יש לנו במרחב שלושה בסיסים - B_1,B_2,B_3 , אז ברור שמתקיים התנאי $[T]_{B_1}^{B_3}=[T]_{B_2}^{B_3}[T]_{B_1}^{B_2}$, ניתן להראות זאת ע"י חישוב, אבל גם ע"י יחידות הפיתוח של וקטור לפי בסיס.

<u>הצמדות</u>

בהינתן בסיסים B_1,B_2 , והעתקה לינארית $T:V\to V$, ניזכר שיש לנו את המטריצה המייצגת של T לפי B_i שתסומן $[T]_{B_i}$ עבור $i=1,2$.

השאלה הנשאלת היא מה הקשר בין $[T]_{B_1}$ ובין $[T]_{B_2}$?

תשובה - $[T]_{B_1}=[T]_{B_2}^{B_1}[T]_{B_2}[T]_{B_1}^{B_2}=\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}[T]_{B_2}[T]_{B_1}^{B_2}$.

מדוע? $[T]_{B_1}^{B_2}$ מתרגם וקטורים מ-B_1 ל-B_2 , לאחר מכן, מפעילים עליהם את T כפי שהיא נראית בבסיס B_2 , ולכן מכן $\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$ מחזיר את הוקטורים)אחרי הפעלת T(להגדרתם לפי B_1 . זוהי בדיוק התוצאה של צד שמאל.

ולכן, מטריצות המעבר מאפשרות לנו להתייחס להעתקה באופן כללי, בלי להתייחס לבסיס למרחב עליו היא מוגדרת.

נגדיר יחס שקילות ~ על מרחב המטריצות $M_n(F)$ המוגדר כך - $A\sim B$ אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A=P^{-1}BP$, ונאמר ש-B צמודה ל-A.

תרגיל - הצמדה היא יחס שקילות.

הוכחה - רפלקסיביות - $A=I^{-1}AI$.

סימטריות - אם $A=P^{-1}BP$ אז $PAP^{-1}=B$, ואז $PAP^{-1}=\left(P^{-1}\right)^{-1}A\left(P^{-1}\right)$, כלומר אם נסמן $Q=P^{-1}$ נקבל $Q^{-1}AQ=B$, וברור ש-Q הפיכה.

טרנזיטיביות – אם $A=P^{-1}BP$ ו- $B=Q^{-1}CQ$ אז נציב את המשוואה עבור B במשוואה הראשונה ונקבל $A=P^{-1}\left(Q^{-1}CQ\right)P$.

מאסוצייטיביות בכפל נקבל $A=\left(P^{-1}Q^{-1}\right)C\left(QP\right)$.

ע"פ תכונות ההופכי - $P^{-1}Q^{-1}=\left(QP\right)^{-1}$, ולכן נקבל $A=\left(QP\right)^{-1}C\left(QP\right)$, כלומר $A\sim C$ כנדרש.

ולכן ניתן לסכם את הדיון באופן הבא - מטריצות צמודות, מתארות את אותה ההעתקה, כאשר היא מוצגת ע"י בסיסים שונים.

22) דטרמיננטות

(כתב: אסף כץ.)

הגדרה אקסיומטית - נגדיר פונקציה $det:M_n\left(F\right)\to F$ כפונקציה היחידה שמקיימת:

1. $det\left(I\right)=1$.

2. הדטרמיננטה היא מולטילינארית על עמודות המטריצה - אם נחליף עמודה אחת c של מטריצה A בעמודה c+d, אז נקבל $det\left(A\right)+det\left(A'\right)$ כאשר 'A זאת המטריצה בא העמודה c מוחלפת בעמודה d.

3. הפונקציה היא פונקציה אנטיסימטרית על העמודות, כלומר אם ניקח מטריצה A, ונכתוב מטריצה חדשה 'A שהחלפנו לה זוג עמודות, אז $det\left(A'\right)=-det\left(A\right)$.

ניתן להראות שקיימת רק פונקציה יחידה כזו, והיא תקרא הדטרמיננטה.

ישנה נוסחא מלאה קומבינטורית לדטרמיננטה - $$det\left(A\right)=\sum_{\sigma\in S_n}sign\left(\sigma\right)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$$

כאשר σ אלה התמורות על n איברים. השקילות בין הנוסחא הקומבינטורית לבין תכונות הדטרמיננטה שהוגדרו הוא תרגיל בפישוט של זהויות קומבינטוריות, ואחרי שהוכח שההגדרה הקומבינטורית מקיימת את תכונות 1-2-3, מהיחידות, נובע כי זוהי הגדרת הדטרמיננטה.
לצרכי חישובים פרקטיים, ישנן נוסחאות נוחות יותר (פיתוח ע"פ שורה וע"פ עמודה).

ההסבר הפשוט לנוסחא - מגרילים תמורה על n איברים, שנקרא לה σ.

כעת לכל i בין 1 לבין n, נסתכל באיבר $a_{i,\sigma(i)}$, ונכפול את כולם ביחד.

נחשוב על $i,\sigma\left(i\right)$ כעל "מסלול" במטריצה, למשל - $\begin{pmatrix} & & * & & \\ * & & & & \\ & * & & & \\ & & & & * \\ & & & * & \end{pmatrix}$, הסימן של התמורה - $sign\left(\sigma\right)$, הוא למעשה שווה למינוס אחת בחזקת מספר האינדקסים בהם $i>\sigma\left(i\right)$, כלומר מספר הפעמים בהם המסלול עולה מעל האלכסון הראשי. בדוגמא זה קורה עבור $i=3$ ועבור $i=5$, ולכן הסימן הוא 1.

דוגמא חישוב מטריצה $2x2$ - יש לנו בסה"כ שתי תמורות אפשריות על 2 איברים -

$i(1)=1, i(2)=2$ - המסלול המתאים במטריצה הוא $\begin{pmatrix} * & \\ & * \end{pmatrix}$, שאין בו שינויי מגמה, ולכן סימן התמורה הוא 1. ו-$\sigma(1)=2, \sigma(2)=1$, עם המסלול $\begin{pmatrix} & * \\ * & \end{pmatrix}$, כאן אנחנו משנים מגמה פעם אחת $i=2$, ולכן סימן התמורה הוא מינוס אחת.

בסה"כ למטריצה $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ נקבל $det(A)=1\cdot(ad)+(-1)\cdot(bc)=ad-bc$

דוגמא לחישוב מטריצה 3x3 - כאשר יש שש תמורות אפשריות -

1. $i(1)=1, i(2)=2, i(3)=3$, עם המסלול המתאים - $\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$ והסימן המתאים הוא 1.

2. $\sigma_1(1)=2, \sigma_1(2)=1, \sigma_1(3)=3$, עם המסלול המתאים - $\begin{pmatrix} & * & \\ * & & \\ & & * \end{pmatrix}$ והסימן המתאים הוא -1 (שינוי ב-i=2).

3. $\sigma_2(1)=1, \sigma_2(2)=3, \sigma_2(3)=2$, עם המסלול המתאים - $\begin{pmatrix} * & & \\ & & * \\ & * & \end{pmatrix}$ והסימן המתאים הוא -1 (שינוי ב-i=3).

4. $\sigma_3(1)=3, \sigma_3(2)=1, \sigma_3(3)=2$, עם המסלול המתאים - $\begin{pmatrix} & * & \\ & & * \\ * & & \end{pmatrix}$, 2 שינויי מגמה (i=2,i=3), והסימן המתאים הוא 1.

5. $\sigma_4(1)=3, \sigma_4(2)=2, \sigma_4(3)=1$, עם המסלול המתאים - $\begin{pmatrix} & & * \\ & * & \\ * & & \end{pmatrix}$ והסימן המתאים הוא -1 (שינוי ב-i=3).

6. $\sigma_5(1)=2,\sigma_5(2)=3,\sigma_5(3)=1$, עם המסלול המתאים - $\begin{pmatrix} & & * \\ * & & \\ & * & \end{pmatrix}$ והסימן המתאים הוא 1- (שינוי ב-i=3).

סה"כ נקבל עבור המטריצה
$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$
$$det(A)=1\cdot(aei)+(-1)(bdi)+(-1)(afh)+(-1)(ceg)+1\cdot(cdh)+1\cdot(bfg)$$
למטרות חישוביות, משתמשים בפיתוח לפי שורה או לפי עמודה, דבר המאפשר להוריד את בעיית חישוב הדטרמיננטה של מטריצות מסדרים גבוהים, למטריצות מסדרים פשוטים יותר כמו 2x2 או 3x3.

3 דטרמיננטה של מטריצות יסודיות

נזכיר כי יש שלושה סוגים של מטריצות יסודיות -

1. $C_i(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ - כפל של השורה ה-i-ית ב-alpha\.

2. $A_i(j)$ - הוספת השורה ה-j-ית לשורה ה-i-ית. המטריצה נראית כמו מטריצת היחידה עם תוספת בודדת של 1 מחוץ לאלכסון הראשי.

3. $S_i(j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ החלפת שורות.

כעת נחשב את הדטרמיננטות של סוגי המטריצות השונות.

עבור מטריצה מסוג C_i , מתכונות הלינאריות של הדטרמיננטה, נקבל ש- $det\left(C_i\left(\alpha\right)\right)=\alpha$. ניתן לראות את זה גם דרך כך שהפרמוטציה היחידה שהכפל דרכה איננו מתאפס היא פרמוטציית הזהות $\sigma\left(i\right)=i$.

עבור מטריצה מסוג $A_i\left(j\right)$, גם כאן, $det\left(A_i\left(j\right)\right)=1$. מאחר שפרמוטציה היא חח"ע ועל, אם אנחנו זזים באינדקס אחד, אינדקס אחר חייב לזוז גם כן, ולכן אם זזים מהאלכסון, יהיו למעשה שתי תזוזות מהאלכסון, ולכן כל כפל דרך פרמוטציה שאיננה פרמוטציית הזהות, תתאפס.

עבור מטריצה מסוג $S_i\left(j\right)$, ע"פ ההגדרה האקסיומטית, הדטרמיננטה שווה לדטרמיננטה של I כפול מינוס אחת, ולכן הדטרמיננטה היא מינוס אחת.

ניתן לראות זאת דרך הפרמוטציות בכך שהפרמוטציה היחידה דרכה כופלים את כל האחדות יש בה ירידה אחת מתחת לאלכסון, כלומר סימנה הוא מינוס אחת.

משפט מרכזי - הדטרמיננטה היא כפלית, $det\left(AB\right)=det\left(A\right)det\left(B\right)$ לכל זוג מטריצות B,A.

[הוכחה בנפרד].

כעת תהי A מטריצה כלשהי.

ידוע שניתן לדרג את A לצורה קנונית, ע"י כפל במטריצות אלמנטריות, כלומר יש סדרת מטריצות E_i , שכל אחת מהן משלושת הסוגים הכתובים מעלה, כך ש- $B=R_nR_{n-1}\cdots R_1A$

כאשר B מטריצה מדורגת קנונית - $B=\begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}$

כעת $det\left(B\right)$ שווה למכפלת איברי האלכסון, מהטעמים שראינו קודם, אם חורגים מעל האלכסון, חייבים לחרוג גם פעם אחת מתחתיו, ולכן הכפל יתאפס.

מצד שני, $det\left(B\right)=det\left(R_nR_{n-1}\cdots R_1A\right)=det\left(R_n\right)det\left(R_{n-1}\right)\cdots det\left(R_1\right)det\left(A\right)$.

מהחישובים שעשינו למעלה, $det\left(R_i\right)\neq 0$ לכל מטריצה אלמנטרית שהיא, ולכן $det\left(A\right)\neq 0$ אמ"מ $det\left(B\right)\neq 0$.

כעת $det\left(B\right)=0$ אמ"מ יש אפסים על האלכסון.

אפסים על האלכסון בצורה הקנונית, אומר שהמטריצה איננה הפיכה.

ולכן אם $det(B) \neq 0$, אז B הפיכה.

יהי B^{-1} המטריצה ההופכית של B, אזי $B^{-1} = (R_n R_{n-1} \cdots R_1 A)^{-1}$.

כעת $B^{-1}(R_n R_{n-1} \cdots R_1)A = I$

ע"י שימוש באסוציאטיביות נקבל $(B^{-1} R_n R_{n-1} \cdots R_1)A = I$ כלומר $A^{-1} = B^{-1} R_n R_{n-1} \cdots R_1$ ולכן A הפיכה אמ"מ B הפיכה.

ו-B הפיכה אמ"מ $det(B) \neq 0$, וכן $det(B) \neq 0$ אמ"מ $det(A) \neq 0$.

לסיכום הראינו כי A הפיכה אמ"מ $det(A) \neq 0$.

23) משפט: קבוצת וקטורים במ"ו, $v_1, v_2, ...v_n \in V$ הם בסיס אמ"ם לכל $v \in V$ קיימת הצגה יחידה כך ש- $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$.

הוכחה[35]:

← **נניח ש-** $v_1, v_2, ...v_n \in V$ **הם בסיס של V**. היות ו- $Sp(v_1, v_2, ...v_n) = V$, אזי לכל $v \in V$ קיימת הצגה $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ (וזאת ע"פ הגדרת הספאן) עם מקדמים $a_1, a_2, ...a_n \in F$. כדי להוכיח יחידות, נניח שיש עוד הצגה, $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$. כעת אם נחסיר את המשוואה הימנית מהאמצעית, נקבל $(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + ... + (a_n - b_n)v_n = 0_v$. כיוון ש- $v_1, v_2, ...v_n$ הם בסיס, אז הם בלתי תלויים ליניארית, ולכן צירוף ליניארי שלהם שווה לאפס רק אם כל המקדמים שווה לאפס. לפיכך, $(a_1 - b_1) = 0, (a_2 - b_2) = 0, ...(a_n - b_n) = 0$, ... ומכאן רואים ישירות ש- $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ...a_n = b_n$ ומכאן הוכחנו את יחידות ההצגה, כנדרש.

→ **נניח כי לכל** $v \in V$ **קיימת הצגה יחידה** $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. בפרט, זה אומר כי $Sp(v_1, v_2, ...v_n) = V$ - זאת מוכיחים ע"י הכלה דו-כיוונית. נותר להוכיח אי-תלות ליניארית: נסתכל בצ"ל שמקיים $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$. צריך להוכיח שכל המקדמים הם 0 ($c_i = 0_F$). נרשום $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0_v = 0 * v_1 + 0 * v_2 + ...0 * v_n$, ומיחידות ההצגה נובע ש- $c_n = 0$ ... $c_2 = 0$, $c_1 = 0$. כלומר הראנו שאם יש צ"ל של האיברים שסכומו 0, אזי כל המקדמים הם 0, ומכאן הם בלתי-תלויים ליניארית. יחד עם הפריסה שהראנו, נובע ש- $v_1, ...v_n$ בסיס, כנדרש.

הסבר להוכחה (רק למקרה שההוכחה עצמה לא מובנת לבדה): כמובן, כדי להוכיח אם"ם נצטרך להוכיח שכל צד גורר את השני.

נתחיל מכיוון ←, כלומר נראה שאם $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ הם בסיס של V – הם הוקטורים אשר פורסים את V – אזי כל וקטור במ"ו V, אפשר לראות אותו כצירוף לינארי (להלן צ"ל) של הוקטורים האלו וכצ"ל יחיד. במילים אחרות וקטור במ"ו ניתן לראות כחיבור (באופן יחיד) של הוקטורים של הבסיס. אם כן נוכיח זאת:

כיוון ש- $(v_1, v_2, ..., v_n)$ הם הבסיס ל-V, אזי $sp(v_1, ..., v_n) = V$.

זאת מתוך הגדרת הבסיס – נזכיר, $(v_1, v_2, ..., v_n)$ הם בסיס ל-V אם הם בת"ל זה בזה, ואם הם פורסים את V. ***ההגדרה "פורסים את V" בדיוק אומרת ש- $V = sp(v_1, ..., v_n)$***

תזכורת

[35] במסמך זה, מרבית ההוכחות מובאות בתכליתן: כלומר, כל מה שנדרש להוכחה, אך לא מעבר לכך: בלי ביאורים ותזכורות. עם זאת, בחלק מן ההוכחות – בעיקר למשפטים הראשונים אשר הוכיח, החל מכאן – נתנו הוכחה מנומקת במיוחד, וזאת כדי להקל על התלמיד להסתגל לחומר. תזכורות וביאורים הינם מעבר לרמה הנדרשת לרוב ומעבר למקובל בהוכחה פורמלית, אך מצאנו לנכון להכניסן בהוכחות הראשונות, על-מנת לעזור להבין את החומר.

כלומר כל הצ"ל $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$ הם כל הוקטורים במ"ו.

אוקיי, אז אמרנו שכיוון ש-$(v_1,v_2,...,v_n)$ הם בסיס ל-V אזי: $sp(v_1,...,v_n)=V$. כלומר לכל $v\in V$ קיימת הצגה $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=v\in V$ ($a_1,...,a_n\in\mathbb{F}$ "סקלרים" ששיכים לשדה "שמעליו" המ"ו, כמובן). בכך הזכרנו שלכל וקטור במ"ו יש <u>הצגה</u> ע"י הוקטורים של הבסיס.

את זה רואים בעצם ישירות מתוך ההגדרה של בסיס כ"פורש" מ"ו. אנחנו רוצים להראות שאם $v_1,v_2,...,v_n$ הם בסיס אזי יש הצגה <u>יחידה</u> לכל $v\in V$ של צ"ל של איברי הבסיס: $a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=v\in V$.

אז נראה שהצגה זו, של איברי הבסיס, היא <u>יחידה</u>.

<u>הוכחת יחידות</u>: נניח ששי עוד הצגה של $v\in V$ כצירוף של איברי הבסיס. למשל נניח ש:

$$V=a_1v_1+...+a_nv_n$$
$$V=b_1v_1+...+b_nv_n \quad \longleftarrow \text{הצגה אלטרנטיבית}$$

כעת נראה שזו בעצם <u>אותה הצגה</u>. איך? נחסיר את שני הצדדים ונקבל בצד שמאל $V-V=0$

ובצד ימין $0=(a_1v_1+...+a_nv_n)-(b_1v_1+...+b_nv_n)$ (אגף שמאל).

נשנה את סדר האיברים ונקבל $a_1v_1-b_1v_1+...+a_nv_n-b_nv_n$ - וכל זה שווה כמובן ל-0.

כלומר קיבלנו משוואה $a_1v_1-b_1v_1+...+a_nv_n-b_nv_n=0$

נוציא איברים משותפים ונקבל: $(a_1-b_1)v_1+...+(a_n-b_n)v_n=0$

וכעת יש לנו צ"ל של איברים $v_1,...,v_n$ (איברי הבסיס) אשר סכומו אפס. אנו יודעים שמקרה כזה אפשרי רק <u>אם כל המקדמים הם אפס</u>. זאת כי קבוצת $v_1,...,v_n$ היא בסיס ולכן היא בת"ל, וקב' איברים בת"ל (בהגדרה!) מקיימת תמיד שצ"ל שלה הוא אפס רק אם כל המקדמים הם אפס. כלומר במשוואה הנ"ל כל המקדמים חייבים להיות אפס.

ומכאן: $(a_1-b_1)=0,...+(a_n-b_n)=0$ מכאן רואים ש- $a_1=b_1,...,a_n=b_n$. אם נשתמש בנתון זה ונסתכל מחדש על 2 ההצגות ה"שונות" לפי איברי הבסיס:

$$\begin{matrix}V=a_1v_1+...+a_nv_n\\ V=b_1v_1+...+b_nv_n\end{matrix}$$
וכידוע $a_1=b_1,...,a_n=b_n$ - אז אנו רואים שזוהי למעשה בדיוק אותה הצגה.

כלומר הוכחנו שבהינתן קב' וקטורים שהיא בסיס של מ"ו V $\{v_1,...,v_n\}$ לכל $v\in V$ יש הצגה יחידה לפי האיברים של הבסיס.

נותר להוכיח גם הפוך: שאם לכל $v \in V$ יש הצגה יחידה לפי קב' האיברים $v_1,...,v_n$ אזי $v_1,...,v_n$ הם בסיס של V.

<u>הוכחה</u>: ראשית נזכור ש<u>בסיס</u> הוא קב' <u>בת"ל</u> ו<u>פורסת</u>. כלומר אנו צריכים להוכיח ש-$v_1,...,v_n$ היא קב' <u>בת"ל</u> ו<u>פורסת את V</u>.

נתחיל מלהוכיח שהיא <u>פורסת</u> את V. כלומר $sp(v_1,...,v_n)=V$. נוכיח שיוון ע"י <u>הכלה דו-צדדית</u>.
ראשית נראה ש- $sp(v_1,...,v_n)\subseteq V$: כל איבר ב-$sp(v_1,...,v_n)$ הוא צ"ל של $v_1,...,v_n$. כיוון ש- $v_1,...,v_n$ הם איברים ב-V, וכיוון ש-V מ"ו אז הוא סגור לחיבור ולכפל, אז כל צ"ל של איברים $v_1,...,v_n$ שהם איברים (=וקטורים) <u>במ"ו V עדיין נשאר במ"ו V</u>. זו, בעצם, התכונה הבסיסית של כל מ"ו – סגורות לכפל ולחיבור לוקטורים בתוכו. אם כן הראינו ש- $sp(v_1,...,v_n)\subseteq V$. נראה גם ש: $V\subseteq sp(v_1,...,v_n)$.

<u>הוכחה</u>: ניקח איבר כלשהו כללי מ-V ונראה שהוא גם ב- $sp(v_1,...,v_n)$. ניקח $v\in V$ וע"פ <u>הנתון</u> ל- $v\in V$ (הספציפי הזה שלקחנו) יש הצגה (יחידה) כצ"ל של $v_1,...,v_n$, כלומר $v=a_1v_1+...+a_nv_n$.
כלומר v הוא צ"ל של $v_1,...,v_n$, כלומר $v\in sp(v_1,...,v_n)$ (זה בדיוק המשמעות של להיות שייך ל-sp – שאתה צ"ל של האיברים ב-sp).

אוקיי אז עכשיו ראינו <u>שכל</u> וקטור $v\in V$ הוא גם ב- $sp(v_1,...,v_n)$. כלומר $V\subseteq sp(v_1,...,v_n)$ (כי כל $v\in V$ שייך גם ל-sp). ויחד עם זה שלפני כן ראינו ש- $sp(v_1,...,v_n)\subseteq V$ כעת יש <u>הכלה דו-צדדית</u>.

כלומר $sp(v_1,...,v_n)=V$, כלומר $v_1,...,v_n$ <u>פורסים את V</u>.

נותר לנו כעת להוכיח שהם בת"ל, ויחד עם זה שהם פורסים את V זה יוכיח שהם <u>בסיס ל-V</u>.

נוכיח ש- $v_1,...,v_n$ בת"ל:

הסתכל על צ"ל (נניח) $a_1v_1+...+a_nv_n=0$.

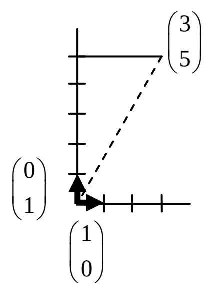
כזכור, ע"פ הגדרת בת"ל, שוויון זה מתקיים אם"ם $a_1,...,a_n$ <u>כולם</u> אפס <u>בהכרח</u>.

נראה שהמשפט הבא נכון: $a_1v_1+...+a_nv_n=0_V=0\cdot v_1+...+0\cdot v_n$

וכיוון ש(ע"פ הנתון!) לכל וקטור יש הצגה <u>יחידה</u> לפי איברי הבסיס, אזי $a_1v_1+...+a_nv_n=0\cdot v_1+...+0\cdot v_n$ ומכאן $a_1=0,...,a_n=0 \Leftarrow$ כלומר כל המקדמים הם אפס, ומכאן <u>$v_1,...,v_n$ בת"ל</u> ויחד עם זה הראינו שהם <u>פורסים</u>, כעת אנו יודעים שהם בסיס ל-V (סוף הוכחת כיוון $\Leftarrow$).

בסה"כ, הוכחנו ש- $\{v_1,...,v_n\}\in V$ הם בסיס ל-V אם"ם לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=a_1v_1+...+a_nv_n$

וקצת אינטואיציה גיאומטרית: נסתכל על $\mathbb{R}^2$ כרגיל בתור מ"ו שנוח "להבין" אותו. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ הם כידוע בסיס ל- $\mathbb{R}^2$, ואכן כל וקטור ב- $\mathbb{R}^2$ אפשר להביע בצורה יחידה כצ"ל שלהם. למשל הוקטור $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ הוא $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ וגיאומטרית:



וכך כל "נקודה" (בעצם, וקטור) ב- $\mathbb{R}^2$ נוכל להביע כצ"ל <u>יחיד</u> של איברי הבסיס. גם אם ניקח איברי בסיס אחרים – נגיד $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ו-$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ - גם איתם נוכל להרכיב <u>כל וקטור</u> ע"י <u>צ"ל יחיד</u>. נסו בעצמכם!

המשמעות חשובה להבנה של המונח 'וקטור': כל וקטור מוגדר בדיוק לפי צ"ל מסוים של איברי הבסיס של המ"ו שלו. אנו לרוב מייצגים צ"ל זה לפי הקואורדינאטות ב"עמודת קואורדינאטות", הפורמט לפיו אנו רגילים לייצג וקטור.

24) משפט: בכל קבוצה פורסת יש תת-קבוצה שהיא בסיס.

הוכחה

נניח $Sp(v_1,v_2,...v_n)=V$. נשתמש באינדוקציה על n (מס' האיברים שמרכיבים את בסיס המ"ו).

בסיס האינדוקציה: אם n=0, אזי המשפט נכון כי $Sp(\varnothing)=\{0_v\}$ וקב' וקטורים ריקה היא בת"ל.

בסיס אינדוקציה חלופי, ניקח n=1, כלומר $Sp(v_1)=V$. כעת, אם $v_1\neq 0$ אזי v_1 בעצמו בסיס והוא כמובן תת-קבוצה בת"ל[36]. אם $v_1=0$ אזי $V=Sp(0_v)=0v$ ומכאן $\varnothing$ היא בסיס, ו- $\varnothing\subseteq\{v_1\}$.

וכעת, צעד האינדוקציה: נניח שהמשפט נכון עבור n-1 איברים, ונוכיח נכונות עבור n איברים.

נתבונן בוקטורים $(v_1,v_2,...v_n)$ המקיימים $Sp(v_1,v_2,...v_n)=V$. כעת, אם $(v_1,v_2,...v_n)$ בת"ל, אזי הם בעצמם בסיס, והוכחנו את נכונות המשפט. אם הם כן ת"ל, אזי קיים i כך ש- $v_i\in(v_1,v_2,...v_{i-1},v_{i+1}...v_n)$

מכאן נקבל כי $V=Sp(v_1,v_2,...v_n)=Sp(v_1,v_2,...v_{i-1},v_{i+1}...v_n)$ (את השיוויון הימני ניתן להוכיח ע"י הכלה הדדית). מכאן, קיבלנו ש-V נפרס ע"י קבוצה של n-1 וקטורים, וע"פ הנחת האינדוקציה, ניתן למצוא תת-קבוצה של ה-n-1 וקטורים (שתהיה כמובן תת-קבוצה של ה-n וקטורים) שהיא בסיס ל-V – כנדרש.

הסבר להוכחה:

אינטואיציה והסבר: בהינתן מ"ו (לדוג' $\mathbb{R}^2$) וקב' פורסת של וקטורים (נניח $\left\{\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ – או כל קב' וקטורים שמספיק צ"ל שלהם ע"מ "לכסות" את כל המ"ו) – אפשר למצוא בתוך הקבוצה הפורסת <u>תת-קבוצה</u> שתהיה <u>בסיס למ"ו</u>.

<u>הוכחה</u>: נניח ש: $V=sp\left(v_1,...,v_n\right)$ (כאשר V הוא המרחב הוקטורי, והספאן הוא הקבוצה הפורסת)

כזכור, זה רק אומר שהקב' פורסת את V, לא שהיא <u>בסיס</u>; <u>כדי להיות בסיס</u> היא צריכה להיות גם <u>בת"ל</u>.

נבצע אינדוקציה על n (כדי להראות נכונות המשפט לכל n), וכך נראה שלא משנה מהו n (כלומר כמה איברים בקב' הפורסת המקורית), אזי יש בתוכה קב' בת"ל פורסת.

---

[36] נסביר למה: כי אם $v_1\neq 0$, ו- $a_1*v_1=0$, אזי $a_1=0$, ומכאן ע"פ הגדרת 'בת"ל', v_1 הוא 'בת"ל'.

מקרה בסיס n=0: ואז ודאי ש: $sp\{\varnothing\}=0_V$ וקב' וקטורים ריקה היא בת"ל (מקרה קצת קיצוני, אבל עדיין חיובי).

מקרה בסיס חלופי n=1: לחלופין אם $V=sp\{v_1\}$ אזי אם $v_1\neq 0$ v_1 בסיס של V - v_1 בת"ל (בעצמו...) וכן נתון $V=sp\{v_1\}$ - מכאן v_1 בסיס.

ואילו אם $v_1=0$ אזי $V=sp\{0_V\}=\{0_V\}$ ואז $\varnothing$ (קב' ריקה) בסיס ו- $\varnothing\subseteq\{v_1\}$ (והמשפט מתקיים).

צעד האינדוקציה:

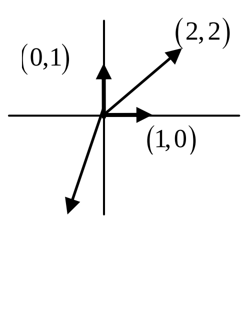
(נניח נכונות ל-n-1 ונוכיח נכונות ל-n). אם כן נתון: $V=sp(v_1,...,v_n)$.

אם $\{v_1,...,v_n\}$ בת"ל אז הם בסיס של V (כי הם כבר פורסים את V). אם לא, אז הם ת"ל, כלומר קיים אחד מהם שהוא צ"ל של האחרים (ככה זה תמיד עם וקטורים ת"ל).
$v_i\in sp(v_1,...,v_{i-1},\hat{v_i},v_{i+1}...,v_n)$. (נזכיר שוב, שסימון הכובע אומר שהאיבר עם הכובע חסר)

כלומר כל צ"ל של $v_1,...,v_n$ שמכיל את v_i ניתן להצגה כצ"ל שלא מכיל את v_i (מכיוון ש- v_i הוא צ"ל של האחרים). כלומר $sp(v_1,...,v_{i-1},\hat{v_i},v_{i+1}...,v_n)=sp(v_1,...,v_n)$. כמובן ששניהם שווים כמובן ל-V (כי $V=sp(v_1,...,v_n)$) ומכאן קיבלנו כי $V=sp(v_1,...,v_{i-1},\hat{v_i},v_{i+1}...,v_n)\Leftarrow$ ופה יש כבר n-1 וקטורים (כי וקטור מספר i חסר) ולפי הנחת האינדוקציה מתוך n-1 וקטורים ניתן למצוא תת-קבוצה בת"ל שמהווה בסיס ל-V.

אינטואיציה גיאומטרית:

ב- $\mathbb{R}^2$, למשל, אם יש לנו וקטורים ש"מכסים" (=פורסים את המישור ע"י צ"ל שלהם) אזי מתוכם ניתן למצוא קב' (במקרה זה של שני וקטורים) שהם בת"ל ומספיקים רק הם כדי לפרוס את המישור – הם יהיו הבסיס. כאן גם ניתן לראות אינטואיטיבית שמס' הוקטורים שנצטרך הוא בדיוק 2 – באופן כללי למ"ו מסוג $\mathbb{F}^n$ (שנראים $\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$) תמיד נצטרך n וקטורים – זהו המימד שלהם.



אם כן, הוכחנו שבכל קבוצה פורסת של מ"ו ניתן למצוא תת-קבוצה שהיא בסיס.

25) משפט: אם $V = sp\left(v_1,...,v_n\right)$ וקיימים $w_1,...,w_m \in V$ בת"ל אז ניתן להשלים את $w_1,...,w_m$ עד לבסיס של V, כאשר נשתמש לצורך כך רק באיברים (=וקטורים) מתוך הקבוצה $\left\{v_1,...,v_n\right\}$

הוכחה:

נסתכל בוקטורים $w_1,...w_m,v_1,...v_n$. זו קב' פורסת (גם בלי ה-wים). נתחיל להשמיט וקטורים וקטורים בלי לשנות את ה-Sp (נעשה זאת ע"י כך שניקח וקטורים שתלויים באחרים, כשנגיע לקבוצה שאין בה תלות ליניארית, הגענו לבסיס). אם יש תלות ליניארית בין איברי הקבוצה, אזי נמצא וקטור שהוא צ"ל של אלה שלפניו *בסדר הזה*. אותו אפשר להשמיט בלי לשנות את ה-Sp. היות וה-wים בלתי-תלויים ליניארית, האיבר הזה (שהינו צ"ל של האיברים הקודמים לו בסדר זה)[37] לעולם לא יהיה אחד מה-wים – אז לא נשמיט wים. האיבר שנשמיט בכל פעם, אם יש כזה איבר, יהיה אחד מה-vים. אז נשמיט בכל פעם עוד ועוד איברי v עד שנגיע למצב של חוסר תלות, והקבוצה עדיין פורסת את V. אז, התהליך הסתיים, ותהיה לנו קבוצת וקטורים שהיא:

בלתי תלויה ליניארית

פורסת את V (כי ה-Sp לא השתנה ומכאן (יחד עם סעיף א') היא מהווה בסיס ל-V.

מכילה את כל $w_1,...w_m$ (כי הם אינם צ"ל של הקודמים להם)

בנוסף ל-wים, היא מכילה כמה מן ה-vים,

כנדרש.

הסבר להוכחה:

(הסבר: כל קב' איברים בת"ל נוכל להשלים לבסיס).

הוכחה: נסתכל בוקטורים $\left\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_n\right\}$. זאת קב' שפורסת את V (הרי גם בלי ה-w-ים היא פורסת, כי היא מכילה את איברי הבסיס והם לבדם פורסים את V).

נשמיט בהדרגה וקטורים, בלי לשנות את ה-sp: כלומר נוציא איברים מהקב', אבל סך הצ"ל האפשריים יישאר קבוע, כלומר המרחב כולו אשר הספאן פורס לא ישתנה. נעשה זאת ע"י כך שנוציא וקטורים שת"ל באחרים.

אם יש תלות לינארית בין הוקטורים בקבוצה – כלומר הם אינם בת"ל – אז נמצא וקטור שהוא צ"ל של האיברים שלפניו בקבוצה (בכל קבוצה ת"ל יש אחד כזה, שת"ל באיברים שלפניו – מוכח בנפרד ופה רק נסתמך על זה). כלומר אנו מסתכלים על $\left\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_n\right\}$ וכיוון שהם ת"ל, אז אנו מחפשים איבר שת"ל באיברים שלפניו. כיוון שה-w-ים הם בת"ל (נתון) אז אין אף w שתלוי לינארית בשאר ה-w-ים (ואף פעם לא יהיה, לאורך כל תהליך ההשמטות). כלומר זהו אחד מה-v-ים. אז נשמיט עוד ועוד v-ים, עד שנגיע למצב שבו יש חוסר-תלות – כלומר קב' ה-w-ים וקב' ה-v-

[37] כזכור, תכונה זו של קבוצות בת"ל ציינו בסעיף המציג את הגדרת ה-Span, צ"ל, ותלות-ליניארית.

ים שנותרה היא בת"ל ועדין פורסת את V (וזאת כי בכל פעם מוציאים וקטור שת"ל באחרים, ולכן הצ"ל וה-sp לא משתנה).

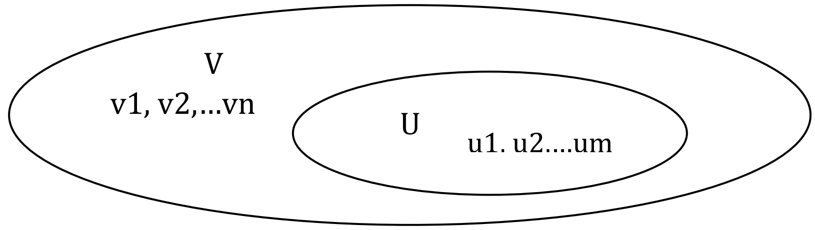
להמחשה, אם קב' הוקטורים היא $\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_n\}$ אז נניח ש-v_i ת"ל באלו שלפניו. זה אומר שה-sp איתו ובלעדיו הוא אותו sp (זו נק' חשובה, מי שלא מבין את, שיחזור ויתאמן על ההגדרה של sp), אז נעיף את v_i ונקבל קב' שעדיין פורסת את V: $\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n\}$. – כעת, אם זו קב' בת"ל אזי קיבלנו קב' בת"ל שפורסת את V, כלומר היא בסיס. אם קבוצה זו אינה בת"ל (כלומר היא ת"ל) נמצא את הוקטור הבא (נניח v_j) שהוא צ"ל של אלו שלפניו – ואז נוכל להוציא אותו וה-sp יישאר אותו דבר (וכאמור, כיוון שה-w-ים בת"ל בעצמם, זה תמיד יהיה אחד ה-v-ים שנוציא). כלומר כעת הקב' היא: $\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_{j-1},v_{j+1},...v_n\}$.

כך נמשיך עד שנגיע לחוסר-תלות (גם אם נצטרך להיפטר מכל ה-v-ים בדרך...).

בסוף נגיע לקב' שהיא פורסת את V, כוללת את $w_1,...,w_m$ (שכאמור, לא העפנו), ובנוסף מכילה רק חלק מה-$v_1,...,v_n$ וזה מש"ל. ■

כלומר הוכחנו שכל קב' וקטורים בת"ל אפשר להשלים לבסיס.

26) משפט: נניח שמ"ו V נוצר-סופית[38], וש- $U \subseteq V$ תת-מרחב, אז U נוצר סופית.



<u>הוכחה</u>

כלומר, צריך להוכיח כי קיימים וקטורים $u_1, u_2, ... u_m$ כך ש- $Sp(u_1, u_2, ... u_m) = U$. (אנו נסמן את מימד מרחב V באות n, כרגיל)

אם $U = \{0v\}$ (תת-מרחב ריק) אזי $U = Sp(\emptyset)$, אבל יכול להיות ש- $U \neq \{0_v\}$. במקרה כזה קיים וקטור $0v \neq u_1 \in U$. נסתכל על תת-המרחב $Sp(u_1) \subseteq$ U.

אם $Sp(u_1) =$ U אזי מצאנו ב-U קבוצה פורסת (והוכחנו את המשפט). אבל, יכול להיות ש- $Sp(u_1)$ איננו פורס את כל U. במקרה כזה אפשר למצוא $u_2 \in U, u_2 \neq 0$, כך ש- $u_2 \notin Sp(u_1)$. היות ו- $u_2 \notin Sp(u1)$ וכן $u_1 \neq 0$, הוקטורים u_1, u_2 בלתי תלויים ליניארית.

עכשיו נבדוק שוב: אם $Sp(u_1, u_2) = U$, אז מצאנו ל-U קבוצה פורסת. אם $Sp(u_1, u_2) \neq U$, אפשר למצוא $u_3 \in U$, כך ש- $u_3 \notin Sp(u_1, u_2)$. כעת $u_1 \neq 0$, $u_2 \notin Sp(u_1)$, $u_3 \notin Sp(u_1, u_2)$, ולכן u_1, u_2, u_3 בת"ל.

נמשיך באותו התהליך. אם התהליך הסתיים, מצאנו ל-U קב' פורסת סופית (וזה מוכיח את המשפט).

אם התהליך נמשך n+1 שלבים, אז מצאנו וקטורים $u_1, u_2, ... u_n, u_{n+1} \in U \subseteq V$, כך ש- $u_1 \neq 0$, $u_2 \notin Sp(u_1)$ … , $u_{n+1} \notin Sp(u_1, ..., u_n)$, ומכאן $u_1, u_2, ... u_n, u_{n+1}$ בלתי-ת"ל – סתירה לזה ש-V נפרס ע"י n וקטורים (כי כפי שמוכח בנפרד, במרחב V הנפרס ע"י n וקטורים, כל n+1 וקטורים יהיו תלויים ליניארית, ומכאן $u_1, u_2, ... u_n, u_{n+1} \in U \subseteq V$ חייבים להיות ת"ל). לכן, התהליך <u>לא יכול להמשך n+1 צעדים</u>, ז"א עבור $k \leq n$ כלשהו, $Sp(u_1, ... u_k) = U$, כלומר U נפרס ע"י מספר סופי של וקטורים, כנדרש.

[38] "נוצר סופית", משמעותו נוצר מקבוצה סופית של איברים. קרי, מרחב וקטורי אשר הינו בעל בסיס עם מספר סופי של איברים. בשלב זה של החומר, כלל לא נדון במרחבים אינסופיים.

27) משפט: אם $V=Sp(v_1,v_2,...v_n)$, $U\subseteq V$ תתמ"ו, $u_1,u_2,...u_n\in \mathrm{U}$ בלתי-תלויים ליניארית, אזי $U=V$

הוכחה: נניח כי $U\neq V$. נבחר וקטור $u_{n+1}\in V$, $u_{n+1}\notin U$. אז $u_1\neq 0_v$, $u_2\notin Sp(u_1)$, $u_n\notin Sp(u_1...u_{n-1})$ (וזאת כי ה-uים בלתי-תלויים ליניארית). כלומר $u_{n+1}\notin U\supseteq Sp(u_1...u_n)$, ולכן $u_1...u_n,u_{n+1}$ בת"ל, וקיבלנו סתירה (כי כמו במשפט הקודם, במרחב שנפרס ע"י n וקטורים לא ייתכנו n+1 וקטורים בת"ל).

28) משפט: אם $V=Sp(v_1,v_2,...v_n)$, $U\subseteq V$, אזי $\dim_f U\le\dim_f V$

(הערה: הוכחנו שאם V נוצר סופית אזי גם U נוצר סופית, ולפיכך אנו יודעים שיש לנו תת-קבוצה שהיא בסיס, ולפיכך אנו יודעים שיש לנו מימד – אחרת בכלל לא היינו יכולים לדבר על המימד של U).

<u>הוכחה</u>

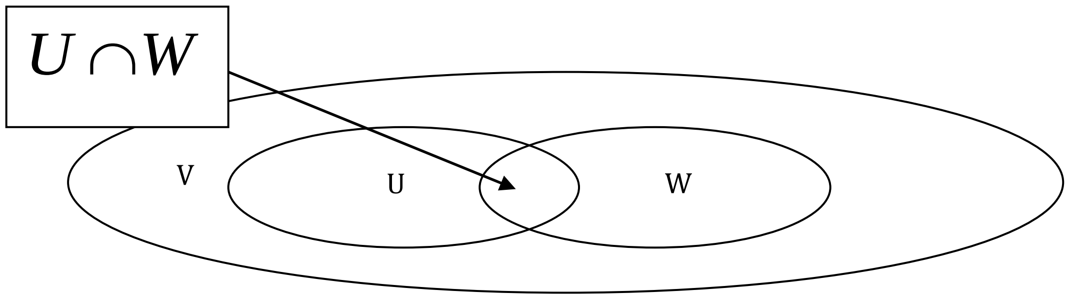
נניח ש- $u_1,u_2,...u_m\in U$ בסיס של U. לפיכך $u_1,u_2,...u_m$ בת"ל (כי איברי בסיס הם תמיד בת"ל).
הוכחנו בעבר שבמרחב נפרס סופית V, כל קב' וקטורים בת"ל אפשר <u>להשלים</u>[39] עד לבסיס של V (ע"י שימוש בוקטורים מקב' פורסת).

נשלים את האיברים עד לקבוצה שתהא בסיס: $u_1,u_2,...u_m,v_i,v_{i2},...v_{il}$ הוא בסיס ל-V. כעת אפשר לראות שמימד U (מספר האיברים בבסיס של U) הוא m (כלומר $\dim_f U=m$) ואילו מספר האיברים בבסיס של V הוא m+l[40], (כלומר $\dim_f V=m+l$)ומכאן $\dim_f U\le\dim_f V$.

[39] (או שבהם בעצמם הבסיס)

[40] כאשר $0\le l$, ו m+l=n.

29) משפט המימדים הראשון: אם $V=Sp(v_1,v_2,...v_n)$, ו-U, W תתי מרחבים, אזי
$$\dim_f(U+W)=dim_f(U)+dim_f(W)-dim_f(U\cap W)$$



ראשית נציין כי יש להוכיח כי U+W ו- $U\cap W$ גם הם מהווים מרחבים וקטורים, וזאת כדי שנוכל בכלל לדבר על המימד שלהם. (משיקולי קריאות, נוכיח זאת במקום אחר[41]).

הוכחה: נבחר בסיס של תת-המרחב $U\cap W$, וקטורים $(z_1,z_2,...z_k)$.

נשלים את $(z_1,z_2,...z_k)$ עד לבסיס של U: $(z_1,z_2,...z_k,u_1,...u_l)$, (כי ע"פ משפט, כל קבוצה בת"ל אפשר להשלים לבסיס)

נשלים את $(z_1,z_2,...z_k)$ עד לבסיס של W: $(z_1,z_2,...z_k,w_1,...w_m)$.

אנו נוכיח כי $(z_1,z_2,...z_k,u_1,...u_l,w_1,...w_m)$ הם הבסיס של U+W, וכשנוכיח את זה, נקבל ש- $\dim_f(U+W)=k+l+m=(k+l)+(k+m)-k=dimU+dimW-dim(U\cap W)$.

אם כן, נוכיח שוקטורי z, u, w הם בסיס של U+W, ע"י כך שהם פורסים את המרחב ושהם בלתי-תלויים ליניארית.

הוכחת פריסה

[41] בקצרה, נוכיח כי U+W הוא תת-מרחב (ונזכיר כי U+W פירושו כל צירוף של וקטור מ-U ווקטור מ-W): 1) U אינו ריק, ולכן U+W אינו ריק. 2. אם ניקח מתוך U+W שני וקטורים: v1=u1+w1, v2=u2+w2 ונחבר אותם, נקבל v1+v2 = (u1+w1) + (u2+w2), ולפי אקסיומת אסוציאטיביות החיבור במ"ו V (שהרי כל האיברים האלו חיים גם ב-V) זה שקול ל- =u1 + w1 + u2 + w2 = (u1+u2) + (w1+ w2), וזהו וקטור חדש ב-U+W – כלומר, הראנו סגירות לחיבור. באופן דומה, ניקח סקלאר מהשדה c ואת v1, ונראה כי c*v1 = c(u1+w1) = cu1+cw1, וזהו וקטור חדש ב-U+W, כלומר יש לנו גם סגירות לכפל – ומכאן הוכחנו כי U+W הינו תת-מ"ו בפני עצמו.

באופן דומה, נוכיח כי $U\cap W$ תתמ"ו. ראשית, הוא כולל את וקטור ה-0 של V (אשר הינו גם וקטור ה-0 של U ושל W). כעת, ניקח וקטורים v1, v2 אשר שייכים ל- $U\cap W$. כיוון שהם שייכים לחיתוך, בפרט שניהם שייכים גם ל-U, ולכאן חיבור שלהם גם יהיה ב-U (מסגירות U לחיבור). באופן זהה, חיבור שלהם יהיה גם ב-W (מסגירות W לחיבור) ומכאן החיבור שלהם יהיה ב- $U\cap W$, כלומר $U\cap W$ סגור לחיבור. באופן דומה גם כפל של v1 (אשר נמצא גם ב-U) בסקלאר יישאר ב-U, בגלל סגירות U לכפל; וכן כיוון ש-v1 נמצא ב-W, אז כפל שלו ב-c יישאר גם ב-W (בגלל סגירות W לכפל), ומכאן $U\cap W$ כולו סגור לכפל, ומכאן הינו תת-מ"ו.

נתחיל מלהוכיח שהם <u>פורסים</u>, כלומר ש- $Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m) = U + W$. זאת נוכיח ע"י הכלה הדדית – צד שמאל מוכל בצד ימין, צד ימין מוכל בצד שמאל, ולכן הם שווים.

ברור כי $Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m) \subseteq U + W$: כל איבר ב-Sp הוא איבר ב-U או איבר ב-W, ומסגירות לחיבור ולכפל של U ושל W כל צירוף ליניארי של איברים מתוכם יישאר בתוכם.

ע"מ להוכיח את השיוויון $Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m) = U + W$ נותר להוכיח הכלה בכיוון $Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m) \supseteq U + W$. כלומר, ניקח $v \in U + W$ ונוכיח כי $v \in Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m)$.

הוכחה: $v \in U + W$, כלומר $v \in U$, וגם $v \in W$, כלומר ניקח $v = u + w$ כש- $u \in U$ ו- $w \in W$. נציג את u ואת w לפי הבסיסים שלהם, כלומר נניח ש-

$u = a_1 z_1 + ... + a_k z_k + b_1 u_{1+} ... + b_l u_l$ ו- $w = c_{1_{z1}} + ... + c_k z_k + d_1 w_1 + ... + d_m w_m$. אזי, v=u+w, כלומר

$v = u + w = a_1 z_1 + ... + a_k z_k + b_1 u_{1+} ... + b_l u_l + c_1 z_1 + ... + c_k z_k + d_1 w_1 + ... + d_m w_m$, כלומר (נרכז איברים סביב איברי ה-z) ונקבל:

$v = u + w = (a_1 + c_1) z_1 + ... + (a_k + c_k) z_k + b_1 u_{1+} ... + b_l u_l + d_1 w_1 + ... + d_m w_m$, כלומר v הוא צ"ל של $(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m)$, כלומר $v \in Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m)$.

מכאן, הוכחנו שאם איבר נמצא ב- $Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m)$ אז הוא ב-U+W ולהיפך, כלומר $Sp(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m) = U + W$.

מכאן: $(z_1, z_2, ...z_k, u_1, ...u_l, w_1, ...w_m)$ פורסים את U+W. נותר להוכיח שהם בת"ל – בלתי-תלויים ליניארית.

<u>הוכחת בת"ל</u>

נניח ש- $a_1 z_1 + ... + a_k z_k + b_1 u_1 + ... + b_l u_l + c_1 w_1 + ... + c_m w_m = 0$. אנו נוכיח שבמקרה כזה כל המקדמים – a, b, cים – הם 0.

אם כן נסתכל על המשוואה $a_1 z_1 + ... + a_k z_k + b_1 u_1 + ... + b_l u_l + c_1 w_1 + ... + c_m w_m = 0$.

אם נעביר אגף את איברי w נקבל כי $a_1 z_1 + ... + a_k z_k + b_1 u_1 + ... + b_l u_l = -c_1 w_1 ... - c_m w_m$, ולזה נקרא וקטור y,

כלומר $y = a_1 z_1 + ... + a_k z_k + b_1 u_1 + ... + b_l u_l = -c_1 w_1 ... - c_m w_m$.

מכאן נובע ש:

א. $y = a_1 z_1 + ... + a_k z_k + b_1 u_1 + ... + b_l u_l$ כלומר $y \in U$ (כי הוא מורכב מאיברי בסיס U שהגדרנו קודם)

ב. $y=c_1w_1+...+c_mw_m$ כלומר $y\in W$ (אנחנו בכלל לא יודעים מה ה-c-ים, אגב, אז זה לא משנה אם הם חיוביים או שליליים פה.)

מא' ו-ב' נובע כי $y\in U\cap W$. אם כך נציג את y לפי הבסיס של $U\cap W$. כזכור, את הבסיס של $U\cap W$ הגדרנו קודם, והוא $z_1,...z_k$. אם כן, נציג את y ונראה דרך ג' להציג את y:
$y=d_1z_1+...+d_kz_k$. נשים לב שדרך זו שקולה לכתוב $y=d_1z_1+...+d_kz_k+0*u_1+....0*u_l$.

אם נשווה את ג' (להלן מימין) ל-א' (להלן באמצע) נראה כי:

$$y=a_1z_1+...+a_kz_k+b_1u_1+...+b_lu_l=d_1z_1+...+d_kz_k+0*u_1+....0*u_l$$

מהעובדה שכל וקטור ניתן להציג באופן יחיד לפי איברי הבסיס (לפי משפט שהוכחנו), נובע בהכרח כי $a_1=d_1,...a_k=d_k,b_1=0,...b_l=0$: כל מקדמי ה-b הם אפסים בהכרח!

אם כן אמרנו שבהינתן $a_1z_1+...+a_kz_k+b_1u_1+...+b_lu_l+c_1w_1+...+c_mw_m=0$, כל מקדמי ה-b הם בהכרח 0. אם כן נראה כי זה שקול למשוואה
$a_1z_1+...+a_kz_k+0*u_1+...+0*u_l+c_1w_1+...+c_mw_m=0$, כלומר
$a_1z_1+...+a_kz_k+c_1w_1+...+c_mw_m=0$. כלומר נותר להוכיח שמקדמי a ו-w הם 0. אבל, אנו יודעים שהאיברים $z_1,...,z_k,w_1,...,w_m$ הם הבסיס של W, ולכן הם בעצמם בלתי-תלויים ליניארית. כלומר, אם קיים $a_1z_1+...+a_kz_k+c_1w_1+...+c_mw_m=0$ (שזה בדיוק מה שיש לנו) אזי (מהגדרתם כבת"ל) כל ה-a וה-c הם 0.

נזכיר, אם כך, שהתחלנו ממצב שבו $a_1z_1+...+a_kz_k+b_1u_1+...+b_lu_l+c_1w_1+...+c_mw_m=0$ והגענו למסקנה שבהכרח כל ה-a, b, c (המקדמים הסקלרים, הלקוחים מהשדה) הם 0. זה מוכיח שאיברים אלו הם בלתי-תלויים ליניארית.

אם כן, סיימנו את ההוכחה: הוכחנו שהאיברים $(z_1,z_2,...z_k,u_1,...u_l,w_1,...w_m)$ הם גם פורסים את U+W, והם גם בת"ל, כלומר הם בסיס של U+W. מכאן, אנו יכולים לראות שמימד U+W יהיה מספר האיברים בבסיס, כלומר
$\dim_f(U+W)=k+l+m=(k+l)+(k+m)-k=dimU+dimW-dim(U\cap W)$.

כנדרש!

30) משפט: נניח V,U מ"ו מעל F, $u_1,...u_n \in U$ בסיס ל-U, $w_1,...w_n \in V$ וקטורים כלשהם ב-V (לאו דווקא בסיס), אזי קיימת **העתקה ליניארית יחידה,** $f:U \to V$, כך ש

$$f(u_1) = w_1,\quad f(u_2) = w_2,\quad \dots \quad f(u_n) = w_n$$

הוכחה:

צריך להוכיח <u>קיום</u> ו-<u>יחידות</u> של העתקה ליניארית כזו.

<u>הוכחת קיום:</u> לכל וקטור $u \in U$ נסתכל בהצגה $u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ ונגדיר $f(u) = a_1w_1 + \dots a_nw_n$.
כעת הגדרנו העתקה $f:U \to V$, שכן הראנו שבהינתן כל וקטור ב-U, אנו נדע כיצד להציגו ב-V.
(והדרך, כפי שהרגע הראנו, היא לקחת את המקדמים של איברי הבסיס ב-U, ולבנות וקטור עם אותם מקדמים לפי הסדר הנתון של איברי הבסיס ב-W)

נוכיח כי זו העתקה ליניארית (משמרת חיבור וכפל בסקלר).

הוכחת שימור חיבור: ניקח u ו-u' ($u' = a'_1u_1 + \dots + a'_nu_n$, ומכאן $f(u') = a'_1w_1 + \dots a'_nw_n$).

כך אנו רואים ש: $u + u' = a_1u_1 + \dots a_nu_n + a'_1u_1 + \dots a'_nu_n = (a_1 + a'_1)u_1 + \dots + (a_n + a'_n)u_n$

ומכאן אחרי שנפעיל את f נקבל
$$f(u + u') = (a_1 + a'_1)w_1 + \dots + (a_n + a'_n)w_n = (a_1w_1 + \dots + a_nw_n) + (a'_1w_1 + \dots a'_nw_n) = f(u) + f(u')$$

והוכחנו סגירות לחיבור.

כעת נוכיח שימור כפל בסקלר: ניקח סקלר $c \in F$ ונראה כי
$cu = c(a_1u_1 + \dots a_nu_n) = (ca_1)u_1 + \dots + (ca_n)u_n$ ומכאן
$f(cu) = (ca_1)w_1 + \dots + (ca_n)w_n = c(a_1w_1 + \dots + a_nw_n) = cf(u)$ והוכחנו סגירות לכפל.

אם כן הוכחנו ש-f משמרת חיבור וכפל בסקלר, כלומר f היא העתקה ליניארית. כעת נראה שאכן

$$f(u_1) = w_1,\quad f(u_2) = w_2,\quad \dots \quad f(u_n) = w_n$$

כפי שדרשנו.

אם כן, נראה שאם ניקח את u_1 ונציג אותו לפי איברי הבסיס, נקבל הצגה כלשון
$u_1 = 1*u_1 + 0*u_2 + \dots + 0*u_n$ ומכאן $f(u_1) = 1*w_1 + 0*w_2 + \dots + 0*w_n = w_1$. באותו האופן
$u_2 = 0*u_1 + 1*u_2 + \dots + 0*u_n$ ולכן $f(u_2) = 0*w_1 + 1*w_2 + \dots + 0*w_n = w_2$, וכן הלאה, עד
$u_n = 0*u_1 + 0*u_2 + \dots + 1*u_n$ ו-$f(u_n) = 0*w_1 + 0*w_2 + \dots + 1*w_n = w_n$.

מכאן, הוכחנו ש- $\begin{matrix} f(u_1)=w_1, \\ f(u_2)=w_2, \\ \dots \\ f(u_n)=w_n \end{matrix}$, כלומר הוכחנו את הקיום של העתקה ליניארית $f:U\to V$ כפי שהגדרנו.

נותר להוכיח יחידות.

הוכחת יחידות

נניח שקיימת $g:U\to V$ עוד העתקה ליניארית שעבורה $g(u_1)=w_1, g(u_2)=w_2,..., g(u_n)=w_n$. אנו נוכיח כי f=g (אלו אותן העתקות).

ניקח $u\in U$, $u=a_1u_1+...+a_nu_n$. נראה כי:

$$g(u)=g(a_1u_1+...+a_nu_n)=g(a_1u_1)+...+g(a_nu_n)=a_1g(u_1)+...+a_ng(u_n)=a_1w_1+...+a_nw_n\ =\ f(u)$$

[42]כלומר לכל u, אז f(u)=g(u), ומכאן f=g.

כלומר, הוכחנו גם יחידות העתקה ליניארית כזו.

המשמעות של הוכחה זו היא שאם 2 העתקות פועלות באופן זהה על איברי הבסיס, אז הן זהות לגמרי. במילים אחרות, העתקה ליניארית מוגדרת לפי הדרך בה היא פועלת על איברי הבסיס. כדי לדעת איך העתקה פועלת על וקטור מסוים, נפרק את הוקטור לאיברי הבסיס, ונשתמש במידע של ההעתקה על איברי הבסיס כדי לבצע את ההעתקה ולדעת כיצד בנוי הוקטור ה'מועתק'.

42 כאשר המעבר הראשון (סימן "=") מצד שמאל הוא לפי הגדרת g(u),

המעבר השני הוא לפי ליניאריות של העתקה g (שימור חיבור של g),

המעבר השלישי הוא לפי ליניאריות של העתקה g (שימור כפל של g),

והמעבר האחרון הוא לפי הגדרת f(u).

31) טענה: $f:U\to V$ היא 'על' אמ"מ $\operatorname{Im} f=V$, וכן f היא חח"ע אמ"מ $\ker(f)=\{0_U\}$

<u>הוכחה:</u>

החלק הראשון מוכח מעצם ההגדרה של התמונה ושל 'על'.

הוכחת החלק השני:

(←) נוכיח כי אם f חח"ע, אז $\ker(f)=\{0_U\}$:

אם $u\neq 0_U$ אז מחח"ע נובע כי $f(u)\neq f(0_U)=0_V$ (כי אחרת יש עוד איבר שפעולת f עליו מחזירה את 0_V, בניגוד להגדרת חח"ע), כלומר $u\notin\ker f$.

(→) נניח ש-$\ker(f)=\{0_U\}$. ניקח $u_1,u_2\in U$ ונניח כי $f(u_1)=f(u_2)$. כעת ע"מ להוכיח חח"ע צ"ל כי $u_1=u_2$. הוכחה: $f(u_1-u_2)=f(u_1)-f(u_2)=0_V$, כלומר $u_1-u_2\in\ker f$, אשר ע'פ ההנחה הינו $\{0_U\}$, כלומר $u_1-u_2=0_U$, כלומר $u_1=u_2$, כנדרש.

32) משפט: אם $U=Sp(u_1,u_2,...u_n)$, $f:U\to V$ העתקה ליניארית, אז $\operatorname{Im} f=Sp(f(u_1),f(u_2)...f(u_n))$

הוכחה: נוכיח ע"י הכלה דו-כיוונית.

← נוכיח כי $\operatorname{Im} f\supseteq Sp(f(u_1),f(u_2)...f(u_n))$. הוכחה: $f(u_1)\in\operatorname{Im} f$. כך גם $f(u_2),...f(u_n)$. לכן, מהיות $\operatorname{Im} f$ תת-מרחב, כל צירוף ליניארי שלהם שייך גם הוא ל- $\operatorname{Im} f$, ומכאן $\operatorname{Im} f\supseteq Sp(f(u_1),f(u_2)...f(u_n))$.

→ נוכיח כי $\operatorname{Im} f\subseteq Sp(f(u_1),f(u_2)...f(u_n))$. ניקח $v\in\operatorname{Im} f$. לפי הגדרת התמונה ($\operatorname{Im} f$) קיים $u\in U$ כך ש- $f(u)=v$. נציג את u לפי איברי הבסיס: $u=b_1u_1+...+b_nu_n$.

אבל אנו יודעים גם כי $v=f(u)=f(b_1u_1+...+b_nu_n)=b_1f(u_1)+...b_nf(u_n)\subseteq Sp(f(u_1),...,f(u_n))$, כלומר כל $\operatorname{Im} f\subseteq Sp(f(u_1),...,f(u_n))$.

הוכחנו הכלה הדדית, ולכן הצדדים שווים, כנדרש.

(33) משפט המימדים השני: אם $U = Sp(u_1, u_2, ...u_n)$, $f : U \to V$ העתקה ליניארית. אז

$$\dim_f \ker(f) + \dim_f \operatorname{Im}(f) = \dim_f U$$

ראשית נזכיר שגם עבור הוכחה זו, יש להוכיח כי Im ו-$\ker$ של העתקה f (כלשהי) הינם תתי-מרחבים, כדי לדון במימדים שלהם (אחרת, ייתכן שהם בכלל לא תתי-מרחבים, ואז מה משמעות המימד של משהו לא-מוגדר?) הוכחה זו ניתנת בנפרד בטקסט זה[43], אך דרושה לצורך הוכחת המשפט.

<u>הוכחה:</u>

נבחר בסיס $w_1, w_2, ...w_k$ של Kerf (לעיתים נכתוב Kerf ולעיתים Ker(f), המשמעות זהה)

ונבחר בסיס $y_1, y_2, ...y_l$ של Imf (בדומה, Imf ו-Im(f) ו- $\operatorname{Im} f$ שונות רק בכתיבתן, והמשמעות זהה)

ניקח $u_1, u_2, ...u_l \in \mathrm{U}$ כך ש-

$$\begin{aligned} &f(u_1) = y_1, \\ &f(u_2) = y_2, \\ &... \\ &f(u_n) = y_n \end{aligned}$$

אנו נוכיח כי <u>הוקטורים $w_1, w_2, ...w_k, u_1, ...u_l$ הם בסיס של U</u> (ואז המימד שלו יהיה k+l).

כדי להוכיח הם בסיס של U נוכיח שהם פורסים ובלתי-תלויים ליניארית.

<u>הוכחת פריסה: נוכיח כי $Sp(w_1, ...w_k, u_1, ...u_l) = U$</u>, ונוכיח זאת ע"י כך שנראה הכלה הדדית.

הוכחת $Sp(w_1, ...w_k, u_1, ...u_l) \subseteq U$: זה ברור, כי כל אחד מה-wים ומה-uים הוא בעצמו איבר ב-U, ומהיות U סגור לכפל ולחיבור כל צ"ל שלהם נשאר ב-U.

נוכיח הכלה גם בכיוון השני: $U \subseteq Sp(w_1, ...w_k, u_1, ...u_l)$. ניקח וקטור $u \in U$ ונראה שאפשר לבטאו כצ"ל שמוכל בספאן.

אם כן אז כמובן ש- $f(u) \in \operatorname{Im} f$. נפרק את f(u) לפי הבסיס של Imf ונקבל $f(u) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_l y_l$. נסתכל ונראה כי:

$$f(u) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_l y_l = c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2) + ... + c_l f(u_l) = f(c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_l u_l)$$

כלומר $f(u) = f(c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_l u_l)$. אם כן נחסיר את צד ימין מצד שמאל ונקבל 0:

$$f(u) - f(c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_l u_l) = f(u - (c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_l u_l)) = 0_v$$

[43] ההוכחה ניתנת יחד עם ההגדרה של הגרעין והתמונה.

אם נשים לב שוקטור זה, אשר f עליו נשלח ל-0, שייך ל-Kerf. נקרא לוקטור זה z:

$z = u-(c_1u_1+c_2u_2+...+c_lu_l)$, וראינו כי $z \in Kerf$. אם כן, נוכל לנציג את z לפי הבסיס של Kerf (שהגדרנו בהתחלה): $z = b_1w_1+...b_kw_k$. כעת אם נשווה בין שתי ההצגות השונות של z נקבל כי $u-(c_1u_1+c_2u_2+...+c_lu_l) = z = b_1w_1+...+b_kw_k$, וע"י העברת אגפים נראה כי $u = b_1w_1+...+b_kw_k+c_1u_1+c_2u_2+...+c_lu_l \in Sp(w_1,...,w_k,u_1,...u_l)$

כלומר ראינו שכל וקטור ב-U ניתן להציג כחלק מה-Sp, ולכן $U \subseteq Sp(w_1,...w_k,u_1,...,u_l)$ ויחד עם ההכלה בכיוון השני, מצאנו כי $U = Sp(w_1,...w_k,u_1,...,u_l)$.

כזכור אנו מוכיחים כי $w_1,w_2,...w_k,u_1,...u_l$ הם בסיס – נותר להוכיח שהם בלתי-תלויים ליניארית.

<u>הוכחת אי-תלות ליניארית</u>

נניח ש- $b_1w_1+b_2w_2+...+b_kw_k+c_1u_1+...+c_lu_l = 0_u$. אנו נרצה להוכיח כי כל המקדמים (איברי b ו-c) הם בהכרח 0.

נפעיל את f על שני צידי המשוואה ונקבל

$$f(b_1w_1+b_2w_2+...+b_kw_k+c_1u_1+...+c_lu_l) = f(0_u) = 0_v \Rightarrow$$

$$b_1f(w_1)+b_2f(w_2)+...+b_kf(w_k)+c_1f(u_1)+...+c_lf(u_l) = f(0_u) = 0_v$$

כעת נשים לב שכל איברי ה-w הם איברי הבסיס של Kerf, כלומר f שולחת אותם לאפס. איברי ה-u נשלחים ל-y, כפי שהגדרנו בתחילת ההוכחה.

$$b_1(0_v)+b_2(0_v)+...+b_k(0_v)+c_1(y_1)+...+c_l(y_l) = 0_v$$

ברור שאפשר להוריד את ה-0ים, ואז נישאר עם:

$$c_1(y_1)+...+c_l(y_l) = 0_v$$

איברי y הם הבסיס של Imf, ולכן הם בעצמם בלתי-ת"ל, ומכאן אנו למדים ש-c1...cl הם בהכרח שווים ל-0. נציב תובנה זאת במשוואה המקורית: $b_1w_1+b_2w_2+...+b_kw_k+c_1u_1+...+c_lu_l = 0_u$, ונקבל

$$b_1w_1+b_2w_2+...+b_kw_k = 0_u,$$

ואנו יודעים שאיברי w הם איברי הבסיס של Kerf, כלומר הם בלתי-תלויים ליניארית, ומכאן אנו למדים שכל איברי b הם 0.

אם כן, הוכחנו שבהינתן $b_1w_1+b_2w_2+...+b_kw_k+c_1u_1+...+c_lu_l = 0_u$,

כל איברי b וכל איברי c חייבים להיות 0, ומכאן איברי $w_1,w_2,...w_k,u_1,...u_l$ הם בת"ל. יחד עם העובדה שאיברים $w_1,w_2,...w_k,u_1,...u_l$ פורסים את U (שהוכחנו קודם), אנו למדים ש-

$w_1, w_2, \ldots w_k, u_1, \ldots u_l$ הם בסיס ל-U, ומכאן מימדו של U הוא (מס' האיברים בבסיס), כלומר k+l, ובמילים אחרות,

$$\dim_f Ker(f) + \dim_f \operatorname{Im}(f) = \dim_f U$$

כנדרש.

34) משפט: $m: Hom(U,V) \to M_{m,n}(F)$ המוגדרת ע"י $m: f \mapsto [f]_{v_1 \dots v_m}^{u_1 \dots u_m}$ היא ה"ל חח"ע ועל, כלומר איזומורפיזם של מ"ו.

נזכיר כי אנו מסתכלים על V, U מ"ו מעל שדה F, כאשר $u_1,...u_n$ הם איברי בסיס U, ו- $v_1,...v_m$ הם איברי בסיס V[44].

הוכחה:

אנו נוכיח כי העתקה m משמרת חיבור ומשמרת כפל – זה יוכיח כי m היא העתקה ליניארית (ה"ל).

לאחר מכן נוכיח כי העתקה m היא העתקה חח"ע ועל – יחד עם הוכחת הליניאריות, זה יוכיח כי היא איזומורפיזם.

נדגיש שמדובר בהתאמה חח"ע ועל רק לאחר בחירת בסיסים ל-V ול-U. קרי, לכל שני בסיסים שנבחר, נמצא לכל העתקה בדיוק מטריצה אחת.

הוכחת m משמרת חיבור

ניקח שתי העתקות ליניאריות מהתחום, $f,g \in Hom(U,V)$, ונראה כי

$$m(f+g) = [f+g]_{v_1,...v_m}^{u_1,...u_m} = [f]_{v_1,...v_m}^{u_1,...u_m} + [g]_{v_1,...v_m}^{u_1,...u_m} = m(f) + m(g)$$

הסבר והוכחה לזה: נסתכל כיצד פועלת כל העתקה על איברי הבסיס וכיצד נראית המטריצה המייצגת שלה. מתוך כך נלמד כיצד נראית ההעתקה המחוברת שלהם (f+g), ומזה כיצד נראית הפעלת m על כל העתקה בנפרד וחיבור התוצאות, לעומת הפעלת m על שתי ההעתקות מחוברות.

ראשית נסתכל כיצד כל העתקה (f ו-g) פועלות על איברי הבסיס (וזכור, ט"ל מוגדרת לפי פעולתה על איברי הבסיס, כך גם מוגדרת המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי בסיס מסוים).

$$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ...a_{m1}v_m$$
$$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ...a_{m2}v_m$$
$$...$$
$$f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ...a_{mn}v_m$$

ומכאן התוצאה של הפעלת m על העתקה f (בדיוק, אנחנו מפעילים פה טרנספורמציה ליניארית על טרנספורמציה ליניארית) היא המטריצה המייצגת של העתקה f, כלומר:

[44] נציין כי האות m מציינת פה גם את מימד מ"ו V וגם את שמה של ההעתקה הליניארית. אין קשר בין שני השימושים של האות m כאן. השימוש הכפול באותה האות עלול ליצור בלבול, אך מטעמי קונבנציה (קרי, כך נהוג לכתוב) אנו משאירים זאת כך.

$$m(f)=[f]_{v_1,...v_m}^{u_1,...u_m}=\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},...a_{1n} \\ a_{21},a_{22},...a_{2n} \\ ... \\ a_{m1},a_{m2},...a_{mn} \end{pmatrix}$$

ובאופן דומה לגבי g, נניח כי g פועלת באופן כלשהו על איברי הבסיס:

$$\begin{aligned} &g(u_1)=b_{11}v_1+b_{21}v_2+...b_{m1}v_m \\ &g(u_2)=b_{12}v_1+a_{22}v_2+...b_{m2}v_m \\ &... \\ &g(u_n)=b_{1n}v_1+b_{2n}v_2+...b_{mn}v_m \end{aligned}$$

ומכאן שתוצאת הפעלת m על g תהיה המטריצה המייצגת את העתקה g לפי הבסיסים האלו והיא:

$$m(g)=[g]_{v_1,...v_m}^{u_1,...u_m}=\begin{pmatrix} b_{11},b_{12},...b_{1n} \\ b_{21},b_{22},...b_{2n} \\ ... \\ b_{m1},b_{m2},...b_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>כעת ראינו איך נראות $m(f)$ ו- $m(g)$.</u>

נסתכל עכשיו על העתקה (f+g) ונתבונן כיצד היא פועלת על איברי הבסיס. כזכור הגדרנו כי לכל שתי העתקות, חיבור ההעתקות פועל כך: $(f+g)(u)=f(u)+g(u)$ כלומר הפעלת חיבור העתקות על וקטור שקול לחיבור הפעלת כל העתקה בנפרד על הוקטור. אם כן נזכור זאת ונסתכל כיצד פועלת (f+g) על איברי הבסיס:

$$\begin{aligned} &(f+g)(u_1)=f(u_1)+g(u_1)=(a_{11}+b_{11})v_1+(a_{21}+b_{21})v_2+...(a_{m1}+b_{m1})v_m \\ &(f+g)(u_2)=f(u_2)+g(u_2)=(a_{12}+b_{12})v_1+(a_{22}+b_{22})v_2+...(a_{m2}+b_{m2})v_m \\ &... \\ &(f+g)(u_n)=f(u_n)+g(u_n)=(a_{1n}+b_{1n})v_1+(a_{2n}+b_{2n})v_2+...(a_{mn}+b_{mn})v_m \end{aligned}$$

לפיכך הפעלת m על העתקה (f+g) תחזיר מטריצה שנראית כך:

$$m(f+g)=[f+g]_{v_1,\dots v_m}^{u_1,\dots u_m}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11},\dots,a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21},\dots,a_{2n}+b_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}+b_{m1},\dots,a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11},\dots,a_{1n} \\ a_{21},\dots,a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1},\dots,a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11},\dots,b_{1n} \\ b_{21},\dots,b_{2n} \\ \dots \\ b_{m1},\dots,b_{mn} \end{pmatrix}$$

שזה בדיוק m(f)+m(g), כי

$$\begin{pmatrix} a_{11},\dots,a_{1n} \\ a_{21},\dots,a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1},\dots,a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11},\dots,b_{1n} \\ b_{21},\dots,b_{2n} \\ \dots \\ b_{m1},\dots,b_{mn} \end{pmatrix}=[f]_{v_1,\dots,v_m}^{u_1,\dots u_n}+[g]_{v_1,\dots,v_m}^{u_1,\dots u_n}=m(f)+m(g)$$

כלומר הראנו כי $m(f+g)=m(f)+m(g)$, כלומר העתקה m משמרת חיבור, כנדרש.

<u>כעת נוכיח כי m משמרת כפל בסקלאר</u> באופן דומה.

אם כן, יהי $f\in Hom(U,V)$ ו- $c\in F$ סקלר מהשדה. צ"ל: $m(cf)=cm(f)$

נתבונן כיצד ה<u>העתקה</u> בשם cf פועלת על איברי הבסיס:

$$\begin{aligned}
&(cf)(u_1)=c*f(u_1)=c(a_{11}v_1+a_{21}v_2+\dots a_{m1}v_m)=c*a_{11}v_1+c*a_{21}v_2+\dots+c*a_{m1}v_m \\
&\dots \\
&(cf)(u_n)=c*f(u_n)=c(a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+\dots a_{mn}v_m)=c*a_{1n}v_1+c*a_{2n}v_2+\dots+c*a_{mn}v_m
\end{aligned}$$

כלומר כעת אנו יודעים כיצד ההעתקה פועלת על איברי הבסיס, אז אנו יודעים כיצד הפעלת m על ההעתקה cf תיראה – וזה איך שהמטריצה המייצגת צריכה להיראות:

$$m(cf)=[cf]_{v_1,\dots v_m}^{u_1,\dots u_m}=\begin{pmatrix} ca_{11},ca_{12},\dots,ca_{1n} \\ ca_{21},ca_{22},\dots,ca_{2n} \\ \dots \\ ca_{m1},ca_{m2},\dots,ca_{mn} \end{pmatrix}=c\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},\dots,a_{1n} \\ a_{21},a_{22},\dots,a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn} \end{pmatrix}$$

וכמובן שזה בדיוק c כפול m(f):

$$c\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n} \\ ... \\ a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn} \end{pmatrix} = c[f]^{u_1,...u_m}_{v_1,...v_m} = c*m(f)$$

ובסה"כ הגענו מאגף שמאל לימין ע"י שיוויונות ומצאנו כי $m(cf) = c*m(f)$.

כלומר, הוכחנו כי m משמרת גם כפל בסקלר – יחד עם שימור חיבור <u>הוכחנו כי m היא העתקה ליניארית</u>. נותר להוכיח כי m היא גם חח"ע ועל.

<u>הוכחת m חח"ע</u>

צ"ל שאם שתי העתקות ליניאריות, $f, g \in Hom(U,V)$ והתוצאות של הפעלת m עליהן זהות, כלומר $m(f) = m(g)$, אז f=g. (זה יוכיח שההעתקה היא חח"ע.)

נתבונן, כזכור הנחנו כי ההעתקות פועלות על איברי הבסיס בצורה כלשהי:

$$\begin{array}{ll} f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ...a_{m1}v_m & g(u_1) = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + ...b_{m1}v_m \\ f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ...a_{m2}v_m & g(u_2) = b_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ...b_{m2}v_m \\ ... & ... \\ f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ...a_{mn}v_m & g(u_n) = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + ...b_{mn}v_m \end{array}$$

ואנו מניחים ש-m(f)=m(g), אזי

$$m(f) = \begin{pmatrix} a_{11}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, ..., a_{2n} \\ ... \\ a_{m1}, ..., a_{mn} \end{pmatrix} = m(g) = \begin{pmatrix} b_{11}, ..., b_{1n} \\ b_{21}, ..., b_{2n} \\ ... \\ b_{m1}, ..., b_{mn} \end{pmatrix}$$

כלומר כל איבר ואיבר זהה: $a_{ij} = b_{ij}$

כעת נסתכל שעבור וקטור אחד מסוים, f מחזירה תוצאה זהה ל-g:

$$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + ... + b_{m1}v_m = g(u_1)$$

$$...$$

$$f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + ... + b_{mn}v_m = g(u_n)$$

ולכן f ו-g פועלת באותו האופן על הבסיס $u_1,...,u_n$ ולכן f=g (כזכור, הוכחנו שאם 2 העתקות ליניאריות פועלות באופן זהה על בסיס, אז הן זהות)[45].

כלומר הראנו שאם התוצאה של m על שתי העתקות היא זהה, אזי שתי ההעתקות עצמן הן זהות – כלומר אם 2 תוצאות זהות בטווח, אזי שני המקורות של התוצאות זהים, ומכאן שהעתקה m היא חד-חד-ערכית. נותר להוכיח ש-m היא העתקה על.

הוכחה ש-m היא העתקה על

צ"ל: עבור מטריצה $\begin{pmatrix} a_{11},...,a_{1n} \\ ... \\ a_{m1},...,.a_{mn} \end{pmatrix} = A \in M_{m,n}$ קיימת העתקה ליניארית $f \in Hom(U,V)$ כך ש-$m(f) = [f]_{v_1,...,v_m}^{u_1,...,u_n}$.

הוכחה: נגדיר $w_1,...w_n \in V$ באופן הבא: $\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ...a_{m1}v_m \\ w_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ...a_{m2}v_m \\ &... \\ w_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ...a_{mn}v_m \end{aligned}$

ולפי משפט שכבר הוכחנו, קיימת העתקה ליניארית יחידה $f: U \to V$ כך ש-$\begin{aligned} f(u_1) &= w_1, \\ f(u_2) &= w_2, \\ &... \\ f(u_n) &= w_n \end{aligned}$ (הוכחנו זאת עבור כל $w_1,...w_n$ בטווח של פונק'), ושאר ההעתקה מבוססת על פעולת העתקה על איברי הבסיס.

וכעת

[45] זאת לפי משפט שהוכחנו, שקיימת העתקה ליניארית יחידה שפועלת באופן מסוים על בסיס מסוים. ראה משפט: נניח U,V מ"ו מעל F, ויהיו $u_1,...u_n \in U$ בסיס ל- U, ויהיו $w_1,...w_n \in V$ וקטורים כלשהם ב-V (לאו דווקא בסיס), אזי קיימת העתקה ליניארית יחידה, כך ש: $f: U \to V$, כך ש $\begin{aligned} f(u_1) &= w_1, \\ f(u_2) &= w_2, \\ &... \\ f(u_n) &= w_n \end{aligned}$

$$m(f) = [f]_{v_1,...,v_m}^{u_1,...,u_n} = \begin{pmatrix} a_{11},...,a_{1n} \\ ... \\ a_{m1},...,.a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

וכזכור כל עמודה היא שורה לפי הייצוג של הבסיס החדש – כלומר, העמודה הראשונה מייצגת את המקדמים של איברי הבסיס החדש אשר סכומם מרכיב את f(u1), העמודה השנייה היא הצ"ל של איברי הבסיס שמרכיב את f(u2), וכן הלאה.

כלומר, מצאנו שלכל מטריצה A ניתן להגדיר העתקה ליניארית כך שהפעלת m על ההעתקה הליניארית תחזיר לנו את המטריצה הזו. כלומר לכל איבר בטווח של m יש גם מקור, כלומר <u>m היא העתקה על</u>.

יחד עם העובדה שהוכחנו ש-m היא העתקה חח"ע והעובדה שהיא העתקה ליניארית, <u>הוכחנו כי m הוא איזומורפיזם של מרחבים-וקטורים</u>: לכל איבר במרחב-וקטורי ראשון נוכל למצוא איבר אחד ויחיד במרחב הוקטורי השני.

זה בדיוק מראה לנו שמטריצה מסוימת מייצגת העתקה ליניארית לפי בסיסים מסוימים, ולהיפך.

כנדרש.

35) טענה: $\dim_f M_{m,n} = mn$

הוכחה:

נגדיר מטריצות בשם $E_{i,j}$ עבור $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, אשר מאופיינות ע"י כך שבשורה i ובעמודה j ערכן הוא 1, ובכל מקום אחר ערכן הוא 0.

לדוגמא: $E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0,0,0,...,0 \\ 0,0,1,...,0 \\ 0,0,0,...,0 \end{pmatrix}$ וכן לדוגמא: $E_{3,3} = \begin{pmatrix} 0,0,0,...,0 \\ 0,0,0,...,0 \\ 0,0,1,...,0 \end{pmatrix}$ ולבסוף $E_{m,n} = \begin{pmatrix} 0,0,0,...,0 \\ 0,0,0,...,0 \\ 0,0,0,...,1 \end{pmatrix}$

קבוצת המטריצות האלו הן בסיס של $M_{m,n}$. נראה שהם פורסים את קבוצת המטריצות, ושהם בת"ל.

הוכחת פריסה:

כל מטריצה $A \in M_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11},...,a_{1n} \\ ... \\ a_{m1},...,.a_{mn} \end{pmatrix}$ ניתן לייצג כ-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11},...,a_{1n} \\ ... \\ a_{m1},...,.a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11} * E_{11} + ... + a_{mn} * E_{mn}.$$

ומכאן אנו רואים כי $M_{m,n}(F) = Sp(E_{i,j})$, כלומר הוכחנו פריסה. (הכלה לכיוון שמאל הראנו כעת, וברור שכל מטריצת $E_{i,j}$ שייכת לקבוצת המטריצות בגודל m על n).

הוכחת אי-תלות ליניארית:

$E_{i,j}$ בת"ל כי סכום $a_{11} * E_{11} + ... + a_{mn} * E_{mn} = 0$ מתקיים רק אם סכום כל המטריצות הוא אפס, כלומר כל המקדמים ($a_{i,j}$) הם אפס, וזה בדיוק מגדיר שזו קבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

כלומר, הוכחנו כי איברי $E_{i,j}$ פורסים את קבוצת המטריצות וכן הינם בלתי-תלויים ליניארית, כלומר הם מהווים בסיס. יש בדיוק m*n איברים מסוג $E_{i,j}$, ומכאן מימד מרחב המטריצות מגודל m על n הוא מספר האיברים בבסיס המרחב, כלומר

$\dim_f M_{m,n} = mn$, כנדרש. מקובל לקרוא לבסיס זה <u>הבסיס הסטנדרטי</u> של מרחב המטריצות.

<u>מסקנה מהטענה:</u> $\dim_f Hom(U,V) = \dim_f U * dim_f V$

<u>הוכחה</u>: $\dim_f Hom(U,V)=\dim_f M_{m,n}(F)=mn=nm=\dim_f U*dim_f V$

כאשר כל השיוויונות לעיל הוכחו לעיל מלבד השמאלי ביותר. השיוויון השמאלי ביותר נובע מהטענה לפיה למרחבים וקטורים איזומורפיים יש את אותו המימד – ונוכיח טענה זו מיד.

36) טענה: אם $f: Y \to W$ איזומורפיזם של מרחבים וקטורים מעל F אז $\dim_f Y = dim_f W$ (במידה והמימד שלהם מוגדר)

הוכחה: אם $y_1, y_2, ... y_p \in Y$ בסיס של Y, אז $W = \mathrm{Im}(f) = Sp(f(y_1), ... f(y_p))$. (ראו משפט:
אם $U = Sp(u_1, u_2, ... u_n)$, $f: U \to V$ העתקה ליניארית, אז $\mathrm{Im}\, f = Sp(f(u_1), f(u_2) ... f(u_n))$)

אנו נוכיח כי האיברים האלו, $f(y_1), ... f(y_p)$, אשר Sp שלהם מרכיב את W, הינם בת"ל. כלומר,
אנו נוכיח שקבוצת האיברים האלו אשר Sp שלהם מרכיב את W הינם בת"ל – ומכאן הם יהיו בסיס של W. כיוון שיש בדיוק p כאלו (ומספרם הוא המימד של המ"ו בטווח, בדוגמא זו Y) אזי גם בסיס של W יהיו p איברים, ומכך מימד W גם הוא יהיה p, כמו של Y.

אם כן נוכיח כי $f(y_1), ... f(y_p)$ הם בת"ל:

נניח כי $a_1 f(y_1) + ... + a_p f(y_p) = 0_w$, אזי כיוון ש-f ליניארית (ומשמרת כפל) אז $f(a_1 y_1) + ... + f(a_p y_p) = 0$ ושוב מליניאריות f והעובדה שהיא משמרת חיבור אז $f(a_1 y_1 + ... + a_p y_p) = 0$. כיוון שכל העתקה ליניארית חח"ע ועל מעתיקה רק את 0 ל-0 (ו-f הוא איזומורפיזם, כלומר העתקה חח"ע ועל) זה אומר ש-$a_1 y_1 + ... + a_p y_p = 0$. כיוון שאיברים אלו: $y_1 ..., y_p$ הם בעצמם בת"ל, אזי אנו יודעים שכיוון ש-$a_1 y_1 + ... + a_p y_p = 0$ אזי $a_1, ..., a_p = 0$ - וזה הרי מה שרצינו להוכיח: בסופו של דבר ראינו שאם $a_1 f(y_1) + ... + a_p f(y_p) = 0_w$ אזי $a_1, ..., a_p = 0$, כלומר $f(y_1), ... f(y_p)$ הם בת"ל.

בסך הכל ראינו כי האיברים אשר Sp שלהם מגדיר את W – האיברים $f(y_1), ... f(y_p)$ - הם בת"ל, אזי הם הבסיס של W, ומכאן מימדו של W הוא p (מספר האיברים בבסיס), וזהו גם מימדו של Y, ז"א $\dim_f Y = dim_f W$, כנדרש.

הערה: הוכחנו הרגע שאם יש שני מרחבים וקטורים אשר מוגדר להם מימד (בסיס עם מספר סופי של איברים), ויש איזומורפיזם ביניהם, אזי יש להם את אותו המימד. אנו הראנו כבר של-
$M_{m,n}(F)$ יש מימד (שמצאנו אותו בקלות על-ידי הבסיס הסטנדרטי). כדי ליישם את הטענה לעיל אודות המימד של העתקות ליניאריות, עלינו להוכיח שגם למרחב הוקטורי של העתקות ליניאריות יש מימד. קרי, להוכיח קיום בסיס סופי ל-$Hom(U,V)$.

נעשה זאת דרך שתי הטענות הבאות: ראשית נראה שאם העתקה מסוימת היא איזומורפיזם אז גם ההעתקה ההופכית היא איזומורפיזם; לאחר מכן נראה שיש קבוצה סופית שפורסת את $Hom(U,V)$.

37) טענה: אם $f:Y\to W$ איזומורפיזם בין מ"ו, אזי גם $f^{-1}:W\to Y$ גם הוא איזומורפיזם של מרחבים וקטורים.

הוכחה: כיוון שאיזומורפיזם f הוא העתקה חח"ע ועל, אזי קיימת העתקה הופכית (כמו לכל העתקה חח"ע ועל[46]). כדי להוכיח שההעתקה ההופכית היא איזומורפיזם, נותר להוכיח שהיא ליניארית: משמרת חיבור וכפל.

א. נוכיח שימור חיבור: צריך להוכיח ש-f^{-1} משמרת חיבור. אזי ניקח $w_1,w_2\in W$. היות ו-f עצמה היא העתקה על, אזי קיימים ויחידים $y_1,y_2\in Y$ כך ש-$f(y_1)=w_1$ וכן $f(y_2)=w_2$, כלומר $f^{-1}(w_1)=y_1, f^{-1}(w_2)=y_2$.

כיוון שהליניאריות של f נתונה, אזי $w_1+w_2=f(y_1)+f(y_2)=f(y_1+y_2)$, ומכאן, כיוון ש-$w_1+w_2=f(y_1+y_2)$ נסתכל על ההעתקה ההפוכה - $f^{-1}(w_1+w_2)=(y_1+y_2)$. וכיוון ש-$f^{-1}(w_1)=y_1, f^{-1}(w_2)=y_2$, ולכן $f^{-1}(w_1)+f^{-1}(w_2)=y_1+y_2=f^{-1}(w_1+w_2)$.

קרי, ראינו ש-$f^{-1}(w_1)+f^{-1}(w_2)=y_1+y_2=f^{-1}(w_1+w_2)$ - כלומר f^{-1} משמרת חיבור.

ב. נוכיח שימור כפל של f^{-1}: ניקח $w\in W$ ו- $c\in F$. כיוון ש-f היא על אז קיים $y\in Y$ כך ש-f(y)=w, ומכאן נובע כי אם נכפול ב-c את y ונפעיל עליו את f אז נקבל f(cy)=cf(y)=cw.
וכיוון שקיבלנו כי f(cy)=cw, אז $f^{-1}(cw)=cy=cf^{-1}(w)$, כלומר f^{-1} משמרת כפל בסקלר ($f^{-1}(cw)=cf^{-1}(w)$).

אז גילינו כי f^{-1} משמרת כפל בסקלר ומשמרת חיבור, ולכן היא העתקה ליניארית – כלומר גם ההעתקה ההפוכה היא איזומורפיזם, כנדרש.

כעת, אחרי שהראנו שאם f איזומורפיזם אז גם f^{-1} איזומורפיזם, נשתמש בעובדה זו כדי להראות שלמרחב ההעתקות ליניאריות בין 2 מרחבים וקטורים נתונים יש בסיס סופי.

[46] בשלב זה של החומר, איננו מתעכבים על להסביר מהי העתקה הופכית, ולא מדוע לכל העתקה חח"ע ועל ישנה העתקה הופכית, אשר גם היא חח"ע ועל. ודאו כי אתם מבינים מדוע. גם כאן, דוגמאות מתוך R^2 הן נוחות מאוד כדי להמחיש את הרעיון.

38) טענה: למרחב העתקות בין 2 מרחבים וקטורים כלשהם (V,U) יש בסיס.

נסתכל על העתקה m, $m: Hom(U,V) \to M_{m,n}(F)$ [47]. לפי הטענה לעיל, קיימת גם $m^{-1}: M_{m,n}(F) \to Hom(U,V)$ שגם היא איזומורפיזם. כידוע, באיזומורפיזם בין מ"ו, הטווח הוא Sp של פעילות ההעתקה על איברי הבסיס של המקור: (כזכור: ראו משפט:
אם $U = Sp(u_1, u_2, ...u_n)$, $f: U \to V$ העתקה ליניארית, אז $\operatorname{Im} f = Sp(f(u_1), f(u_2)...f(u_n))$).

מכך, $Hom(U,V) = \operatorname{Im}(m^{-1}) = Sp(m^{-1}(E_{ij}))$ (עבור i,j בין 1 לבין n. כזכור, $M_{m,n}(F) = Sp(E_{ij})$).

(נזכור, שכיוון ש m^{-1} הוא "על" אז $Hom(U,V) = \operatorname{Im}(m^{-1})$)

כלומר, מצאנו קבוצה סופית שפורסת את $Hom(U,V)$, ומכאן יש לה בסיס. קרי, כעת נוכל להשתמש בטענה: **טענה: אם** $f: Y \to W$ **איזומורפיזם של מרחבים וקטורים מעל F אז** $\dim_f Y = dim_f W$ **(במידה והמימד שלהם מוגדר)** ונדע שהמימד של $Hom(U,V)$, מרחב ההעתקות הליניאריות בין U לבין V, שווה למימד $M_{m,n}(F)$ (כאשר מימדי U ו-V הם m ו-n), והוא m*n (ראו טענות קודמות).

כלומר, דרך שרשרת טענות אלו, הוכחנו כי $\dim Hom(U,V) = \dim M_{n,m}$.

[47] ע"פ משפט לעיל, זהו איזורמפיזם.

39) משפט: נניח ש- $f:U\to V$ העתקה ליניארית, $c_o\in U, b\in V$, $f(c_o)=b$ אזי $f^{-1}(b)=c_o+\ker f$ [48]

הסבר: אנו נראה שכל "הפתרונות" של b – כלומר, כל הערכים ב-U שהפעלת f עליהם מחזירה את b – הם Kerf, "מוזז" ב- c_o.

נוכיח את שיוויון $f^{-1}(b)=c_o+\ker f$ ע"י הכלה הדדית. כלומר, נוכיח שכל איבר ב-U אשר הפעלת f עליו מחזירה את b (כלומר איבר בקבוצת $f^{-1}(b)$) שייך גם לקבוצת הוקטורים (שגם היא ב-U) $c_o+\ker f$, ולהיפך.

<u>נוכיח $c_o+\ker f\subseteq f^{-1}(b)$:</u>

כל וקטור שניקח מ- $c_o+\ker f$ צורתו תהיה c_o+w, כאשר $w\in\ker f$,

ומכאן $f(c_o+w)=f(c_o)+f(w)=b+0_v=b$, ז"א $c_0+w\in \mathrm{f}^{-1}(b)$, ומכאן כל וקטור ב- $c_o+\ker f$ שייך גם ל- $f^{-1}(b)$, כנדרש.

<u>נוכיח הכלה בכיוון השני: $f^{-1}(b)\subseteq c_o+\ker f$</u>

ניקח $f^{-1}(b)\in V$, ז"א $f(v)=b$. נרשום את v בתור $v=c_o+(v-c_o)$, וכעת נראה כי

$$f(v-c_o)=f(v)-f(c_o)=b-b=0_v$$

כלומר מצאנו כי $(v-c_o)\in\ker f$,

ולכן v שלנו (כל v..), $v=c_o+(v-c_o)=c_0+\ker f$, ולכן $f^{-1}(b)\subseteq c_o+\ker f$, כנדרש.

כלומר, אוסף הפתרונות של העתקות ליניאריות הוא פתרון ספיציפי פלוס kerf.

[48] זהו סימון מקובל, אך מעט מבלבל. במקרה הזה, כאשר אנו כותבים $f^{-1}(b)$, איננו מתכוונים ל"פונקציה ההופכית ל-f" – שהרי f גם יכולה להיות לא הפיכה בכלל. סימון זה מציין את קבוצת הוקטורים אשר הפעלת f עליהם נותנת את b. כלומר, את קבוצת ה'מקורות' ל-b, וזאת ללא קשר להופכיות של f. במילים אחרות, זוהי קבוצת $\{u\mid u\in U,\ f(u)=b\}$

40) משפט: יהיו $U_1, U_2 \subseteq V$ תתי-מרחבים, $v_1, v_2 \in V$ וקטורים, אזי אם $v_1 + U_1 = v_2 + U_2$ אז $U_1 = U_2$

הוכחה: $O_v \in U_1$ (כי וקטור ה-0 שייך לכל תת-מרחב). מכאן נוכל לכתוב את v_1 בצורה הבאה:

$v_1 = v_1 + O_v \in v_1 + U_1 = v_2 + U_2$ (כשהשוויון הימני ביותר נובע מהנתון), ומכאן אנו רואים כי $v_1 \in v_2 + U_2$, כלומר קיים $u_2 \in U_2$ כך ש-$v_1 = v_2 + u_2$, ובהעברת אגפים נגיע לכך ש-$v_2 - v_1 = -u_2 \in U_2$.

כמובן גם יכולנו לעשות את כל התהליך בכיוון ההפוך והינו מקבלים כי $v_1 - v_2 = -u_1 \in U_1$. מיד נשתמש במסקנות אלו, אז נסמנן:

א': $v_2 - v_1 = -u_2 \in U_2$

ב': $v_1 - v_2 = -u_1 \in U_1$

כעת אנו רוצים להוכיח כי $U_1 = U_2$ ונעשה זאת בנוהל, ע"י הוכחת הכלה דו-כיוונית.

אם כן, נוכיח כי $U_1 \subseteq U_2$. ניקח וקטור כלשהו מ-U_1 ונראה שהוא שייך גם ל-U_2. אם כן, ניקח לדוגמא את $w_1 \in U_1$. אזי $v_1 + w_1 \in v_1 + U_1 = v_2 + U_2$. כלומר, קיים $w_2 \in U_2$ כך ש-$v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, ומכאן ע"י העברת אגפים נקבל כי $w_1 = (v_2 - v_1) + w_2$. כאן נשלב את משוואה א' ונראה כי למעשה קיבלנו כי $w_1 = -u_2 + w_2$, ובמשוואה זו שני האיברים בצד ימין שניהם שייכים ל-U_2, כלומר קיבלנו כי גם w_1 שייך ל-U_2 - כלומר הגענו למסקנה שכל וקטור ב-U_1 הוא גם ב-U_2, ומכאן $U_1 \subseteq U_2$, כנדרש.

הכיוון השני זהה לחלוטין, כמובן, עקב הסימטריה.

נוכיח כי $U_2 \subseteq U_1$: ניקח וקטור כלשהו מ-U_2, נניח $z_2 \in U_2$. אז, בדומה לעיל, נראה כי $v_2 + z_2 \in v_2 + U_2 = v_1 + U_1$, לכן קיים $z_1 \in U_1$ כך ש-$v_2 + z_2 = v_1 + z_1$, ולכן $z_2 = (v_1 - v_2) + z_1$, ואם נציב את משוואה ב' נקבל כי $z_2 = -u_1 + z_1 \in U_1$, כלומר $z_2 \in U_1$, כלומר כל וקטור בתתמ"ו U_2 שייך גם ל-U_1.

ע"י ההכלה ההדדית הגענו למסקנה ששני תתי המרחבים שווים, ולכן הם שקולים - הוכחנו את המשפט.

<u>מסקנה מהמשפט: אפשר לזהות תת-מרחב מקורי לפי תת-המרחב המוזז שלו.</u>

מכאן, אם נגדיר תת-מרחב אפיני / ישרייה $v + U$, אזי תת-המרחב U נקרא תת-המרחב המכוון. הרגע הוכחנו שיש רק תת-מרחב אחד שאפשר 'להזיז' אותו כדי לקבל תת-מרחב אחר; כלומר, רק

תת-מרחב 'מקורי' אחד לתת-המרחב האפיני). במקרה כזה נגדיר גם את מימד תת-המרחב האפיני למימד תת-המרחב המכוון, כלומר $\dim_f(v+U)=\dim_f U$.

41) משפט: תהי $f_A : F^n \to F^m$ העתקה ליניארית אשר מיוצגת בבסיס מסוים ע"י מטריצה A. אזי,

$$\operatorname{Im} f_A = Sp(columns / of \ / \ A)$$

נבהיר ראשית שיטת סימון – לעמודה מספר 1 במטריצה A אנו נקרא a*1, שכן האיברים שבעמודה זו מסומנים כ-a11, a21, a31... וכן הלאה, כלומר כולם מסוג a*1. לעמודה 2 נקרא a*2, וכן הלאה. בהוכחה זו נתייחס באופן זהה לסימונים f_A ול-f, כמסמנים את אותה ההעתקה.

כלומר, אנו מנסים להוכיח כי $\operatorname{Im} f_A = Sp(a*1, a*2, ..., a*n)$, וזה שייך כמובן ל-$F^m$ (כי לשם שולחת העתקה f).

<u>הוכחה:</u>

ראשית נזכיר כי $F^n = Sp(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\...\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\...\\0\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}0\\0\\0\\...\\1\end{pmatrix})$ (עמודות בגודל n). ניזכר במשפט שהוכחנו בעבר:

משפט: אם $U = Sp(u_1, u_2, ...u_n)$, $f : U \to V$ העתקה ליניארית, אז $\operatorname{Im} f = Sp(f(u_1), f(u_2)...f(u_n))$

כלומר התמונה של כל העתקה מורכבת מ-Sp של תמונת איברי בסיס המרחב. כלומר ה<u>תמונה של העתקה f כולה</u> מורכבת מכל צירוף ליניארי אפשרי של התוצאות של הפעלת f על איברי הבסיס במרחב עליו f פועלת.

והרי הרגע ראינו את איברי הבסיס במרחב של f במשפט שלנו – f פועלת $f_A : F^n \to F^m$, כלומר איברי הבסיס של המרחב שלה הינם $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\...\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\...\\0\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}0\\0\\0\\...\\1\end{pmatrix}$ (זהו הבסיס הסטנדרטי של F^n). קרי, התמונה של ההעתקה תהיה Sp של פעילות f על איברי הבסיס, כלומר

$\operatorname{Im} f_A = Sp(f_A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\...\\0\end{pmatrix}, f_A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\...\\0\end{pmatrix}, ..., f_A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\...\\1\end{pmatrix})$, ומכיוון שהפעלת f על וקטור שווה לכפל משמאל של מטריצה A באותו הוקטור, אזי ביטוי זה שווה ל-

$$= Sp(A*\begin{pmatrix}1\\0\\0\\...\\0\end{pmatrix}, A*\begin{pmatrix}0\\1\\0\\...\\0\end{pmatrix},..., A*\begin{pmatrix}0\\0\\0\\...\\1\end{pmatrix}) = Sp(\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\...\\a_{m1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\...\\a_{m2}\end{pmatrix},...,\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\...\\a_{mn}\end{pmatrix}) = Sp(a*1, a*2,..., a*n)$$

כנדרש.

מסקנות מהמשפט:

כזכור, הוכחנו במשפט המימדים השני כי

משפט המימדים השני: אם $U = Sp(u_1, u_2, ...u_n)$, $f : U \to V$ העתקה ליניארית. אז
$$\dim_f Ker(f) + \dim_f \mathrm{Im}(f) = \dim_f U$$

ומכאן שאם U הוא ממימד n, אז

$$\dim_F(\ker f_a) = n - \dim(\mathrm{Im}\, f_A) = n - \dim_f Sp(a*1, a*2,..., a*n)$$

וכיוון שהגדרנו כי $\dim_F(c_0 + \ker f_A) = \dim_F(\ker f_A)$ אזי נקבל סה"כ כי

$$\dim_F(c_0 + \ker f_A) = \dim_F(\ker f_A) = n - \dim(\mathrm{Im}\, f_A) = n - \dim_f Sp(a*1, a*2,..., a*n)$$

במילים – המימד של תת-מרחב אפיני של פתרונות של מע' Ax=b[49] כלשהי (בתנאי שקיים פתרון ספציפי c_0) הוא מספר הנעלמים n פחות המימד של תת-מרחב של F^m שנפרס ע"י העמודות של מטריצת המקדמים A – כלומר מספר העמודות הבת"ל של A.

נגדיר $rank_c(A) = \dim_F Sp(a*1, a*2,..., a*n)$ = הדרגה של מטריצה A לפי העמודות.

ומכאן בסה"כ:

$$\dim(c_0 + \ker f_A) = n - rank_c(A)$$

****

[49] כלומר, מע' משוואות אשר ניתן לייצג אותה כמטריצה A נכפלת בעמודת משתנים x, עם תוצאה של עמודת פתרונות b. הבנת הערה זו תורמת להבנה הכוללת של אלגברה ליניארית, אבל איננה הכרחית להבנת הוכחת משפט זה.

42) משפט: לכל מטריצה A, $rank_c(A) = rank_r(A)$

כזכור, מטריצה A נראית כך $A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n} \\ ... \\ a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn} \end{pmatrix}$.

נסמן את השורות a1*, a2*, a3*...am*,

ואת העמודות נסמן: a*1, a*2, ...a*n.

כזכור, ע"פ הגדרה ה"ראנק" של השורות הוא מספר השורות הבת"ל, וכך גם לגבי מספר העמודות.

$$rank_c(A) = \dim_F Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n})$$

$$rank_r(A) = \dim_F Sp(a_{1*}, a_{2*}, ..., a_{n*})$$

<u>הוכחה</u>

אנו נוכיח תחילה את המשפט עבור מטריצה מדורגת[50] D, ולאחר מכן נראה שדירוג מטריצה איננו משנה את הראנק של המטריצה, ומכאן נראה שיוויון גם למטריצה לא מדורגת.

באופן ספיציפי, נראה כי

$rank_c(D) = rank_r(D) = r$ - כאשר כזכור r מסמן לנו את מספר העמודות ה"מיוחדות" לאחר דירוג קנוני.

כזכור, לאחר דירוג קנוני של מטריצה יש לנו "מטריצה מדורגת" אשר יש בה "קו מדרגות" בין r "העמודות המיוחדות"[51]:

---

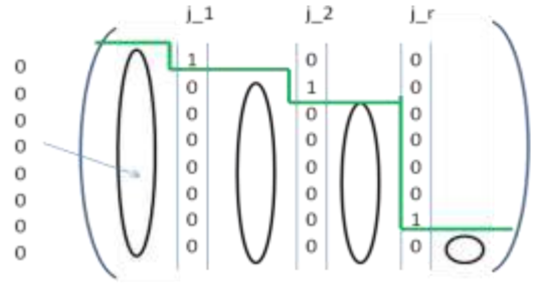
[50] מטריצה "מדורגת" מוגדרת בהמשך ההוכחה באופן אינטואיטיבי ונוח לעבודה אשר יכול להניח את הדעת. עם זאת, ע"מ לתת הגדרה פורמלית, נאמר כי מטריצה $A = (a_{ij}) \in M_{n*m}(\mathbb{F})$ נקראית 'מדורגת' אם:

א. כל שורות האפסים, אם יש כאלו, הן בתחתית המטריצה.

ב. נניח ש-r השורות הראשונות שונות משורות אפסים, ו-(m-r) (כלומר m מינוס r) השורות התחתונות הן שורות אפסים. אז אם נסמן $a_{1,j1} =$ האיבר הראשון שאינו 0 בשורה 1, וכך הלאה עד $a_{r,jr} =$ האיבר הראשון שאינו אפס בשורה r, אז מתקיים $j_1 < j_2 < ... < jr$.

ג. כל איברי $a_{1,j1}$ עד $a_{r,jr}$ הינם אחד, וכל האיברים בעמודה מעליהם הינם 0.

*הערה: לעיתים מוגדרת מטריצה מדורגת כממלאת רק את סעיפים א' ו-ב' לעיל, ומטריצה אשר ממלאת גם את סעיף ג' מוגדרת כמוגדרת 'קנונית'. אנו נדבוק להגדרה לפיה מטריצה מדורגת ממלאת גם את הגדרה ג'.



נסמן את איברי הבסיס הסטנדרטי של מרחב עמודות המטריצות:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\...\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\...\\0\end{pmatrix},...e_m=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\...\\1\end{pmatrix}$$

<u>טענה:</u> $Sp(columns-of-D)=Sp(d_{*1},...,d_{*n})=Sp(e_1,...,e_r)$

הוכחת הטענה:

מצד אחד (הכלה בכיוון אחד),

$d_{*j1}=e_1,d_{*j2}=e_2,...,d_{*jr}=e_r$ ולכן $Sp(e_1,...,e_r)=Sp(d_{*j1},...,d_{*jr})\subseteq Sp(d_{*1},...d_{*n})$

מצד שני (הכלה בכיוון השני), ניקח עמודה מספר h. כמובן ש-d*h =

$$d_{*_h}=\begin{pmatrix}d_{1h}\\d_{2h}\\...\\d_{rh}\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$ (אחרי שורה r הכל אפסים – מתחת לקו המדרגות)

לכן $d_{kh}=d_{1h}*e_1+d_{2h}*e_2+...+d_{rh}*e_r\in Sp(e_1,...,e_r)$,

זאת אומרת ש- $d_{*h}\in Sp(e_1,...,e_r)$ לכל h (בין 1 לבין n), ולכן $Sp(d_{*1},...,d_{*n})\subseteq Sp(e_1,...,e_r)$.

---

[51] "עמודות מיוחדות" הינן העמודות אשר יש בהן 'איבר מיוחד', כלומר "1" – העמודות אשר אינן אפסים.

הראנו הכלה כפולה ולכן הוכחנו את הטענה כי $Sp(d_{*1},...,d_{*n})=Sp(e_1,...,e_r)$.

מכאן, $\underline{rank_c(D)=\dim Sp(d_{*1},...,d_{*n})=\dim Sp(e_1,...,e_r)=r}$

הראנו שראנק העמודות הוא r. כעת נראה עבור השורות.

אם כן, כעת נוכיח כי ראנק השורות של מטריצה מדורגת D הוא r.

היות ו- $d_{r+1*}=0_{F^n},...,d_{m*}=O_{F^n}$ (כל השורות אחרי r הן אפסים בלבד),

אזי $Sp(d_{1*},d_{2*},...,d_{r*},d_{r+1*},...,d_{m*})=Sp(d_{1*},d_{2*},...,d_{r*})$ (כי שורות אחרי השורה r תורמות רק אפסים ולא משנות את הSp).

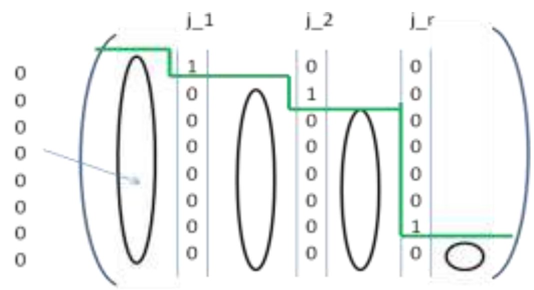
נשים לב כי r השורות הראשונות (של כל מטריצה מדורגת) - $(d_{1*},d_{2*},...,d_{r*})$ - הן בת"ל.

נוכיח כי הן בת"ל:

נניח ש- $c_1*d_{1*}+c_2*d_{2*}+...+c_r*d_{r*}=(0,...,0)$ (כזכור, אנו עוסקים פה בכפל וחיבור של וקטורי שורה, ולכן גם התוצאה תהיה וקטור שורה).

צ"ל כי $c_1=c_2=...=c_r=0$.

ובכן, נתבונן שוב בצורה:



ונשים לב כי

$c_1*d_{1*}=(0,...,c_1,...,0)$ - כיוון שב-c1 מוכפל בשורה 1, ובשורה 1 כל האיברים מלבד האיבר במקום j1 הינם אפס, ובמקום j1 נמצא המספר 1. כלומר התוצאה היא שורה שכל איבריה אפסים מלבד השורה במקום j1, אשר ערכה c1.

באופן דומה נקבל:

$c_2*d_{2*}=(0,...,.,c_2,...,0)$ (כל האיברים אפס מלבד האיבר במקום j2, אשר ערכו c2)

$c_3*d_{3*}=(0,...,..,c_3,...,0)$

וכן הלאה, עד

$c_r * d_{r*} = (0,...,....,c_r,...,0)$ (c-r במקום ה-r ומלבד זאת רק אפסים).

ואז כשנסכום את השורות נקבל:

$$c_1 * d_{1*} = (0,...,c_1,...,0)$$

$$c_2 * d_{2*} = (0,...,.,c_2,...,0)$$

$$c_3 * d_{3*} = (0,...,..,c_3,...,0)$$

$$c_r * d_{r*} = (0,...,....,c_r,...,0)$$

$$= (0,..c_1,..c_2,..c_3...,c_r,...,0)$$

אך גם (ע"פ ההנחה)

$$c_1 * d_{1*} + c_2 * d_{2*} + ... + c_r * d_{r*} = (0,...,0...,0,...0,...,0)$$

כלומר, כל ה-cים = 0, שזה בדיוק מה שרצינו להראות – מכאן, יש אי-תלות בין השורות.

קרי: $rank_r(D) = \dim_F Sp(d_{1*},...d_{m*}) = \dim_F Sp(d_{1*},...,d_{r*}) = r$

הראנו, כזכור, שמימד ה-Sp של כלל השורות שווה למימד ה-Sp של השורות ה'מיוחדות', וזה בתורו שווה למספר השורות ה'מיוחדות' עצמן כיוון שהן בת"ל, ומכאן מספר השורות המיוחדות – r – הוא דרגת המטריצה המדורגת.

אם כן, עד כה הוכחנו את המשפט עבור כל מטריצה מדורגת דירוג קנוני: $rank_r = rank_c$.

נמשיך ונראה שהמעבר ממטריצה רגילה למטריצה מדורגת אינו משנה את דרגת המטריצה בשורות ובעמודות. אז המשפט יתקיים עבור כל מטריצה (כי כל מטריצה ניתן לדרג, ואז במטריצה המדורגת דרגת השורות והעמודות תהיינה שוות זו לזו ולדרגתן במטריצה המקורית).

כזכור, ניתן לעבור ממטריצה A כלשהי למטריצה מדורגת D (אשר תייצג את אותה הטרנס' הליניארית) ע"י תהליך המכונה 'דירוג מטריצה' (שם נוסף מקובל לתהליך זה הוא 'שיטת החילוץ של גאוס'). תהליך זה כולל, כזכור, סדרה של פעולות אלמנטריות מהסוגים הבאים:

1. כפל שורה בסקלר
2. החלפת שורה i בשורה j
3. תוספת של שורה אחת (כפול סקלר) לשורה אחרת.

אם כן, נראה כעת כי rank השורות של מטריצה כלשהי (A) שווה ל-rank השורות של המטריצה המדורגת שלה. כלומר:

טענה: $Sp(a_{1*},...a_{m*})=Sp(d_{1*},...,d_{m*})$ [52]- וכדי להראות זאת, יספיק לנו להראות שכל אחת מהפעולות האלמנטריות על השורות (המפורטות לעיל) אינו משנה את ה-Sp.

נוכיח:

- פעולה 1, כפל שורה כלשהי בסקלר c - : $Sp(a_{1*},...a_i,...a_{m*})=Sp(a_{1*},...,c*a_i,...a_{m*})$ אינו משנה את ה-Sp של השורות.
- פעולה 2, החלפת שורה i בשורה j - $Sp(a_{1*},...a_i,..,a_j,....a_{m*})=Sp(a_{1*},...a_j,..,a_i,....a_{m*})$ - אינו משנה את ה-Sp של השורות.
- פעולה 3, תוספת (שורה * סקלר) לשורה אחרת: $Sp(a_{1*},...a_i+c*a_j,...a_j,...a_{m*})=Sp(a_{1*},...a_i,...a_j,..a_{m*})$ - גם כן אינו משנה את ה-Sp של השורות.

מכאן, כיוון שאף אחת מהפעולות האלמנטריות בתהליך הדירוג אינו משנה את דרגת השורות, תהליך הדירוג כולו אינו משנה את דרגת השורות, ומכאן

$$rank_r(A)=\dim_F Sp(a_{1*},...,a_{m*})=\dim_F Sp(d_{1*},...,d_{m*})=rank_r(D)$$

נותר לנו להראות שדרגת העמודות בכל מטריצה שווה לדרגת השורות במטריצה המדורגת שלה (קרי, במטריצה המקבילה לה המתקבלת לאחר דירוג).

טענה: $rank_c(A)=rank_c(D)$

הוכחה: נסתכל במערכת המשוואות הליניאריות $Ax=0$ ו-$Dx=0$ (שתיהן הומוגניות, כפי שאפשר לראות).

אלו הן מערכות הומוגניות[53] והן שקולות זו לזו, כי ניתן לעבור ממטריצה A למטריצה D ע"י מהלכים חוקיים (מהלכים 1, 2 ו-3 המפורטים לעיל, ה'פעולות האלמנטריות') ועמודת האיברים החופשיים תמיד נשארת $\begin{pmatrix}0\\0\\...\\0\end{pmatrix}$ (כי היא מלכתחילה כולה אפסים – כי המערכות הומוגניות – והפעולות האלמנטריות רק משאירות אותה מלאה באפסים).

---

[52] נבהיר, כי הסימון a_{1*} מציין את כל שורה מס' אחת במטריצה: $a_{11},a_{12},....$.

[53] התייחסות זו לקשר שבין מטריצות לבין מערכות משוואות אינה נידונה בהרחבה בהקשר להוכחה זו.

אם כן, נסתכל בהעתקות הליניאריות הבאות (נזכור – כפל של מטריצה בוקטור מייצג העתקה ליניארית):

1. $f_A : F^n \to F^m$, אשר כמובן לוקחת איבר $c \in F^n$ ומפעילה עליו את A, כלומר $f_A : c \mapsto Ac$.

2. $f_D : F^n \to F^m$, אשר בדומה לוקחת איבר $c \in F^n$ ומפעילה עליו את D, כלומר $f_A : c \mapsto Dc$.

אוסף הפתרונות של מע' המשוואות ההומוגנית $Ax = 0$ הוא הגרעין של f_A - $\ker(f_A)$ ואוסף הפתרונות של f_D , $Dx = 0$, הוא $\ker(f_D)$. היות והמערכות $Ax = 0$ ו-$Dx = 0$ שקולות, אזי $\ker(f_D) = \ker(f_A)$ (יש להן את אותם הפתרונות).

מצד שני, הוכחנו בעבר כי $\dim Ker(f_A) = n - \dim_F \operatorname{Im}(f_A) = n - rank_c(A)$ (משפט המימדים).

וכן $\dim Ker(f_D) = n - \dim_F \operatorname{Im}(f_D) = n - rank_c(D)$

ולכן $n - rank_c(A) = n - rank_c(D)$

כלומר $\underline{rank_c(A) = rank_c(D)}$

הוכחנו את הטענה – דרגת העמודות של מטריצה רגילה זהה לדרגת העמודות של המטריצה המדורגת שלה.

מכאן, יחד עם ההוכחות הקודמות, הראנו כי $rank_r(A) = rank_r(D) = rank_c(D) = rank_c(A)$ ומטרנזיטיביות רואים כי $rank_r(A) = rank_c(A)$, ומכאן מעתה ואילך ניתן להתייחס כמקשה אחת לדרגתה של מטריצה A - $rank(A)$.

43) למערכת משוואות יש פיתרון אמ"מ דרגת המטריצה המייצגת אותה עם עמודת האיברים החופשיים[54] שווה לדרגת המטריצה המייצגת אותה ללא עמודת האיברים החופשיים

הסבר למשפט: תהי מערכת המשוואות הליניארית הבאה:

$$(*) = \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

נוכל לסמן את המטריצה המייצגת אותה (ללא עמודת המקדמים) בצורה הבאה:

$$A_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21,} \ldots, a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

ואת אותה מערכת המשוואות לייצג במטריצה <u>עם</u> עמודת האיברים החופשיים:

$$A^*{}_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, b_1 \\ a_{21,} \ldots, a_{2n}, b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}, \ldots, a_{mn}, b_n \end{pmatrix}$$

אם כן, המשפט אומר כי למע' המשוואות (*) יש פתרון אמ"מ $rank(A) = rank(A^*)$.

הוכחה: ← נניח שיש פיתרון, $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n, (s_i \in F)$.

צ"ל ש- $rank(A) = rank(A^*)$.

נציב את הפיתרון במע' המשוואות שלנו, ונקבל:

$$(*) = \begin{cases} a_{11}s_1 + \ldots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + \ldots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}s_1 + \ldots + a_{mn}s_n = b_n \end{cases}$$

. נראה שנוכל לכתוב את זה גם בצורה הבאה:

[54] תזכורת: עמודת האיברים החופשיים הם אלו אשר במערכת משוואות הינם ללא משתנה; קרי, במערכות המשוואות המופיעות בהוכחה זו (ודומותיה), האיברים החופשיים מוצגים ע"י עמודת ה-b-ים.

$$= s_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + s_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}s_1 + \dots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + \dots + a_{2n}s_n \\ \dots \\ a_{m1}s_1 + \dots + a_{mn}s_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

נמצא שאם למערכת * יש פיתרון אז: $Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n}) \ni \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - עמ' הפתרונות היא צירוף ליניארי של העמודות.

ולכן, $Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n}) = Sp(a_{*1}, a_{*2}, ...a_{*n}, b)$ - ומכאן הדרגה של A (מימד ה-Sp של העמודות, $Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n})$) זהה ל-*A, מימד ה-Sp של העמודות בלי עמודת b ($Sp(a_{*1}, a_{*2}, ...a_{*n}, b)$) – כלומר

$rankA = rankA^*$, כנדרש.

(זה היה כיוון אחד, וכעת נוכיח את הכיוון השני:)

נניח ש-$rankA = rankA^*$. אזי, צריך להוכיח שלמערכת המשוואות * יש פיתרון.

הוכחה: נתחיל מלפרט את מה שנתון לנו:

$$rankA^* = \dim Sp(a_{*1}, a_{*2}, ...a_{*n}, b) = \dim Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n}) = rankA$$

היות ו-$Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n}) \subseteq Sp(a_{*1}, a_{*2}, ...a_{*n}, b)$ אז משיוויון ה<u>מימדים</u> שלהם נובע שיוויון המרחב כולו. (ראו משפטים 5 ו-6 לתזכורת בנושא) כלומר:

$Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n}) = Sp(a_{*1}, a_{*2}, ...a_{*n}, b)$ (זהו כבר שיוויון ממש, לא רק שיוויון מימדים) ולכן עמודה b היא צ"ל של עמודות A:

$b \in Sp(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n})$, ולכן קיימים $s_1, s_2, ...s_n \in F$ כך ש-b=

b = $s_1a_{*1} + s_2a_{*2} + \dots + s_na_{*n}$ =

$$= s_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + s_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}s_1 + \dots + a_{1n}s_n \\ a_{21}s_1 + \dots + a_{2n}s_n \\ \dots \\ a_{m1}s_1 + \dots + a_{mn}s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ז"א ש- $s_1, s_2, ...s_n \in F$ הם פתרון למע' המשוואות, כנדרש.

דטרמיננטות

44) תכונה 1 של דטרמיננטות - טענה: $\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ c*a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = c*\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

אם כופלים שורה במטריצה בסקלר c, זה שקול למכפלה של c בדטרמיננטה של המטריצה המקורית.

הוכחה:

$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ c*a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots c*a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} = c*\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} = c*\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

כנדרש.

45) תכונה 2 של דטרמיננטות - טענה: $\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*}+a_i{'}_* \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i'*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$

הוכחה:

$a_{i*} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$,

$a_{i'*} = (a_{i'1}, a_{i'2}, \dots, a_{i'n})$

$a_{i*} + a_{i'*} = (a_{i1} + a_{i'1}, a_{i2} + a_{i'2}, \dots, a_{in} + a_{i'n})$

$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*}+a_{i'*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} * .. * (a_{i\sigma(i)} + a_{i'\sigma(i')}) * \dots * a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} * \dots a_{i\sigma(i)} * \dots * a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} * \dots a_{i'\sigma(i')} * \dots * a_{n\sigma(n)} = \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i'*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

כנדרש.

46) תכונה 3 של דטרמיננטות - טענה: אם יש למטריצה A שתי שורות זהות, אזי $\det(A)=0$

את טענה זו לא נוכיח –היא נובעת ישירות מתוך תכונות הגדרת המטריצה, אך היא ארוכה וטכנית, ואיננה קשורה להבנה של אלגברה ליניארית.

47) תכונה 4 של דטרמיננטות - טענה:
$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{i*} \\ \ldots \\ a_{j*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{j*} \\ \ldots \\ a_{i*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

(החלפת שתי שורות במטריצה הופכת את סימן הדטרמיננטה)

הוכחה:

$$0 = \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{i*} + a_{j*} \\ \ldots \\ a_{j*} + a_{i*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{i*} \\ \ldots \\ a_{j*} + a_{i*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{j*} \\ \ldots \\ a_{j*} + a_{i*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

(פיצול השורה המחוברת הראשונה, לפי הטענה על פיצול שורות מאוחדות בדטרמיננטה).

$$= \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{i*} \\ \ldots \\ a_{j*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{i*} \\ \ldots \\ a_{i*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{j*} \\ \ldots \\ a_{j*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \ldots \\ a_{j*} \\ \ldots \\ a_{i*} \\ \ldots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

(פיצול השורה המחוברת השנייה, ע"פ אותה הטענה)

$$= \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + 0 + 0 + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = 0$$

(ע"פ הטענה שדטרמיננטה של מטריצה עם 2 שורות זהות היא 0, וגרירת הזהות לאפס מתחילת המשוואה)

כלומר, קיבלנו כי

$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = 0$$

ומכאן

$$\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

כלומר הראנו שאם מחליפים שתי שורות במטריצה זו בזו, אזי סימן הדטרמיננטה מתהפך, כנדרש.

48) אם A, B שתי מטריצות מאותו הסדר (אותו הגודל), אזי $\det(AB)=\det(A)*\det(B)$

לא נוכיח משפט זה כאן. למתעניינים, ניתן למצוא וריאציות שונות להוכחה באינטרנט, וביניהן ההוכחה הפשוטה ביותר בעיניי כותב שורות אלו:

http://www.proofwiki.org/wiki/Determinant_of_Matrix_Product

49) משפט: אם השורות של מטריצה A הן ת"ל, אז $\det(A)=0$

הוכחה: נניח ש-A היא מסדר n*n. ע"פ ההגדרה של תלות ליניארית, קיים i בין 1 לבין n כך ש-

$$a_{i*}=c_1a_{1*}+...+c_{i-1}a_{i-1*}+c_{i+1}a_{i+1*}+...+c_na_{n*}$$

(כלומר, שורה i היא צ"ל של שאר השורות)

מכאן:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}a_{1*}\\ ...\\ a_{i*}\\ ...\\ a_{n*}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}a_{1*}\\ ...\\ a_{i*}=c_1a_{1*}+...+c_{i-1}a_{i-1*}+c_{i+1}a_{i+1*}+...+c_na_{n*}\\ ...\\ a_{n*}\end{pmatrix}$$

ע"פ תכונות 1 ו-2 של דטרמיננטות, נוציא את ה-C-ים החוצה בכל פעם, ויישאר לנו כפל בדטרמיננטה של מטריצה עם שתי שורות זהות:

$$=c_1\det\begin{pmatrix}a_{1*}\\ ...\\ a_{1*}\\ ...\\ a_{n*}\end{pmatrix}+...+c_{i-1}\det\begin{pmatrix}a_{1*}\\ ...\\ a_{i-1*}\\ ...\\ a_{n*}\end{pmatrix}+c_{i+1}\det\begin{pmatrix}a_{1*}\\ ...\\ a_{i+1*}\\ ...\\ a_{n*}\end{pmatrix}+...+c_n\det\begin{pmatrix}a_{1*}\\ ...\\ a_{n*}\\ ...\\ a_{n*}\end{pmatrix}$$

נשים לב כי בכל איבר כזה יש שתי שורות שהן זהות – באיבר הראשון מופיעה פעמיים השורה הראשונה a_{1*}, באיבר מספר i-1 מופיעה פעמיים השורה מספר i-1, וכן הלאה. ע"פ תכונה 3 של הדטרמיננטות, דטרמיננטה של מטריצה עם שתי שורות זהות מתאפסת, ומכאן כל איבר בסכום שווה לאפס, ומכאן הסכום כולו שווה לאפס. קרי: הראנו שאם ניתן להציג את אחת משורות המטריצה כצ"ל של שאר השורות, אזי הדטרמיננטה של המטריצה כולה הוא אפס, כנדרש.

50) משפט: אם העמודות/שורות של מטריצה A בת"ל, אזי $\det(A) \neq 0_F$

הוכחנו כבר שאם השורות תלויות ליניארית אז הדטרמיננטה שווה אפס, ויחד עם הוכחה זו נקבל שהקשר הוא אמ"מ).

הוכחה: נשתמש בטענת עזר: אם העמודות של מטריצה A (מסדר n*n) הן בת"ל, אזי קיימת מטריצה A' מסדר n*n כך ש-A'*A=I.

ואז, לפי כפליות דטרמיננטות (משפט 25) אזי 1=det(I)=det(A'A)=det(A')*det(A) ומכאן $\det(A) \neq 0$ (כי כפל שלו במשהו מחזיר תוצאה שאינה אפס).

נותר לנו להוכיח את טענת העזר.

הוכחת טענת העזר:

נתון שהשורות של A בת"ל. השורות הן וקטורים ב- F^n - כל אחת שייכת ל- F^n:

$$F^n = \{(c_1, c_2, ..., c_n) \mid c_1, c_2, ...c_n \in F\}$$

המימד של F^n הוא n (אפשר לראות שמספר האיברים בבסיס הסטנדרטי של F^n הוא n: $e_1, e_2, ..., e_n$, כאשר $e_1 = (1,0,...0), e_2 = (0,1,0,...0), ...e_n = (0,...0,1)$).

לפיכך השורות $a_{1*}, ...a_{n*} \in F^n$ והן בת"ל, כלומר מימד $Sp(a_{1*}, ...a_{n*})$ הוא n (כי יש n איברים וכולם בת"ל).

כעת, $Sp(a_{1*}, ...a_{n*}) \subseteq F^n$ (כי כל איבר בו מוכל ב- F^n, שהוא מ"ו), וכן מימדיהם שווים. כזכור, אם תתמ"ו מוכל במ"ו אחר ומימדיהם שווים, נובע מכך שתת-המרחב שווה למרחב כולו, כלומר $Sp(a_{1*}, ...a_{n*}) = F^n$.

במילים אחרות: $a_{1*}, ...a_{n*}$ פורסים את F^n.

מכאן, כל וקטור ב- F^n אפשר לכתוב כצירוף ליניארי של השורות. נכתוב את איברי הבסיס הסטנדרטי, כל-אחד כצ"ל של השורות:

$$\begin{aligned} e_1 &= b_{11}a_{1*} + ... + b_{1n}a_{n*} \\ e_2 &= b_{21}a_{1*} + ... + b_{2n}a_{n*} \\ &... \\ e_n &= b_{n1}a_{1*} + ... + b_{nn}a_{n*} \end{aligned}$$

נתבונן ב-e1 מוצג כך.

$$e_1 = b_{11}a_{1*} + ... + b_{1n}a_{n*} = (1,0,....0)$$

נתבונן על כל איבר בסכום בנפרד. האיבר הראשון, $b_{11}(a_{11},a_{12},...,a_{1n})$, שווה ל-1 (כי הוא שווה לאיבר הראשון בתצוגה הסטנדרטית של e1. האיבר השני, $b_{12}(a_{21},a_{22},...,a_{2n})$, שווה ל-0, וכך גם כל שאר האיברים. בסה"כ נקבל:

$$b_{11}(a_{11},a_{12},...,a_{1n})$$

$$b_{12}(a_{21},a_{22},...,a_{2n})$$

$$... \qquad\qquad +$$

$$b_{1n}(a_{n1},a_{n2},...,a_{nn})$$

$$e_1=(1,0,....,....,0)$$

כעת נראה מה קורה כשנבנה מטריצה מאיברי b ונכפיל אותה משמאל באיברי A:

$$\begin{pmatrix} b_{11},b_{12},...,b_{1n} \\ b_{21},b_{22},...,b_{2n} \\ ... \\ b_{n1},b_{n2},...,b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},...,a_{1n} \\ a_{21},a_{22},...,a_{2n} \\ ... \\ a_{n1},a_{n2},...,a_{nn} \end{pmatrix}=(?)$$

באיבר במקום 1,1 נקבל $b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+...,b_{1n}a_{n1}=1$.

בשאר שורה 1 נקבל $b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+...,b_{1n}a_{n2}=0$, ... $b_{11}a_{1n}+b_{12}a_{2n}+...,b_{1n}a_{nn}=0$ שכולם שווים לאפס.

באופן בשאר עמודה אחת נקבל מכפלות של איברים אשר ניתן לראות ע"י השוואת סכומם לאיברי הבסיס הסטנדרטי מיוצגים לפי בסיס השורות, כי על האלכסון הראשי ישנם רק 1ים ואילו שאר איברי המטריצה הם אפסים:

$$\begin{pmatrix} b_{11},b_{12},...,b_{1n} \\ b_{21},b_{22},...,b_{2n} \\ ... \\ b_{n1},b_{n2},...,b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},...,a_{1n} \\ a_{21},a_{22},...,a_{2n} \\ ... \\ a_{n1},a_{n2},...,a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,0,.0 \\ 0,1,.0 \\ 0..,1,0 \\ 0,....1 \end{pmatrix}$$

כלומר, מטריצת ה-bים האלו היא בדיוק A’, ואנו רואים כי A’A=I, כנדרש.

הערה חשובה:

יכולנו לבצע את אותו התהליך בדיוק עם העמודות, במקום עם השורות, והיינו מקבלים מטריצה אשר כפל שלה <u>מימין</u> במטריצה A מחזיר את מטריצת היחידה. נכנה את מטריצה זו A”, כך ש-AA”=I.

אז כעת הוכחנו שאם שורותיה של A בת"ל (ומשיוויון הדרגות אנו יודעים שגם עמודותיה בת"ל) אז יש לנו A' ו-A'', כך ש-

$$AA'=A''A = I$$

מכאן נראה כי

$$A' = IA' = (A''A)A' = A''(AA') = A''I = A''$$

כלומר $A'=A''$!

למטריצה זו – אשר הרגע הוכחנו שיש רק אחת כמוה – נקרא <u>המטריצה ההופכית ל-A</u>. כפי שהרגע הראנו, אם שורותיה של מטריצה הן בת"ל אזי יש לה מטריצה הופכית. נזכיר גם שמרבית הוכחה זו הייתה על הוכחת טענת העזר של המטריצה ההופכית, אך הייתה זו טענת עזר כדי להוכיח ששורותיה (ועמודותיה) של מטריצה הן בת"ל אמ"מ הדטרמיננטה של המטריצה שונה מ-0, וזה (דרך טענת העזר) נכון אמ"מ יש לה מטריצה הופכית.

51) משפט: עבור מטריצה A ריבועית מסדר N*N, $\det(A^t)=\det(A)$

הוכחה: נסמן $b_{ij}=B=A^t$.

$$\det(A^t)=\det(B)=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}...b_{n\sigma(n)}$$

נחליף אינדקסים בשל הטרנס פוזיציה - $b_{ij}=a_{ji}$:

$$\det(A^t)=\det(B)=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)b_{\sigma(1)1}b_{\sigma(2)2}...b_{\sigma(n)n}$$

$$\det(A^t)=\det(B)=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))}a_{\sigma(2)\sigma^{-1}(\sigma(2))}...a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))}=$$

כעת נשים לב שהאינדקס השני הוא σ^{-1} של האינדקס הראשון – כלומר אנו רצים על אינדקס רץ באינדקס הראשון, ועל תמורה מסוימת של האידנקס הראשון בתור האינדקס השני. בכל אחד מהגורמים, האינדקס השני הוא σ^{-1} של האינדקס הראשון, ואילו באינדקסים הראשונים מופיעים המס' 1 עד n.

אם כך נמיין את האיברים בסכימה לפי האינדקס הראשון – אנו איננו יודעים מתי מופיע האיבר $a_{1\sigma^{-1}(\sigma(1))}$, אך עבור $a_{\sigma(i)\sigma^{-1}(\sigma(i))}$ כלשהו, זה מה שמופיע – כי תמורה כלשהי של σ מחזירה את הערך "1"... כלומר הביטוי לעיל שקול ל-

$$=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}...a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

נזכיר את <u>כלל כפליות הסימן (אשר הוכחותו לא תובא כאן)</u>, לפיו עבור כל תמורה σ, מתקיים $sign(\sigma)=sign(\sigma^{-1})$.

כלומר נוכל להסתכל על כל הביטוי הזה כעל:

$$=\sum_{\sigma\in S_n} sign(\sigma^{-1})a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}...a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

נסמן את σ^{-1} כ-T, ונקבל:

$$=\sum_{T\in S_n} sign(T)a_{1T(1)}a_{2T(2)}...a_{nT(n)}$$

והביטוי הזה – ריצה על כל הטרנספורמציות האפשריות – הוא כמובן בדיוק ההגדרה של det(A), כלומר הראנו כי

$\det(A^t) = \det(A)$, כנדרש.

52) משפט: הדטרמיננטה של מטריצה משולשית הוא מכפלת איברי האלכסון

נזכיר: מטריצה משולשית עליונה נראית מהצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, 0, 0.....0 \\ a_{21}, a_{22}, 0..0 \\ ....a_{ii}, 0 \\ a_{n1}...........a_{nn} \end{pmatrix}$$

ואנו רוצים להוכיח כי

$\det(A) = a_{11}a_{22}....a_{nn}$ (והמטריצה המשוחלפת תהיה בעלת אותו דטרמיננטה, שכן למטריצות משוחלפות דטרמיננטה זהה).

הוכחה:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} .... a_{n\sigma(n)}$$

אם קיים i כך ש- $\sigma(i) > i$ אז $a_{i\sigma(i)} = 0$ (איבר a_{ij} כך ש- $i < j$ יהיה ממוקם מעל לאלכסון, ושם יש רק אפסים). ז"א השסכום הנ"ל צריך להתחשב רק באותן התמורות $\sigma \in S_n$ בהן $\sigma(i) \le i$ לכל i.
בפרט, $\sigma(1) \le 1$, כלומר $\sigma(1) = 1$, וכן $\sigma(2) \le 2$, (ו-1 כבר "תפוס"), כלומר $\sigma(2) = 2$ ... וכך הלאה, עד שמקבלים כי לקבל i התמורה היחידה אשר יכולה להתקבל שלא תאפס את הסכום כולו הינה i עצמו, כלומר האלכסון היחיד אשר יתרום יהיה האלכסון הראשי, קרי סכום הדטרמיננטה כולה תהיה

$$\det(A) = a_{11}a_{22}....a_{nn}$$

(והסימן של תמורה זו גם הוא חיובי, אז הסכום כולו חיובי).

קרי, הדטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה/תחתונה היא מכפלת איברי האלכסון, כנדרש.

הסבר למשפט: נניח קיימות מטריצות A_{k*k} , B_{l*l} , ו- $C_{(k+l)*(k+l)}$, כך ש-C נראית כך:

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \underset{\text{(Anything)}}{*} & B \end{pmatrix}$$

אזי (המשפט אומר) $\det C = \det A * \det B$.

הוכחה:

נתון ש- $C_{ij} = 0$ כאשר $l \le j \le k+l, 1 \le i \le k$ (כלומר, ברביע הימני העליון, איפה שה-0ים)

וע"פ הגדרת הדטרמיננטה,

$$\det C = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) C_{1\sigma(1)} *.....* C_{n\sigma(n)}$$

ושוב, בדומה למשפט על דטרמיננטה של מטריצה משולשית, אם קיים i בין 1 לבין k כך שהתמורה עליו מחזירה ערך בין k+1 לבין k+l, אזי $C_{i\sigma(i)} = 0$ (ומכאן תרומת כל אותו האיבר לדטר' יהיה אפס). לכן, צריך להתחשב רק באותן תמורות σ שעבורן $\sigma(i)$ הוא בין 1 לבין k, לכל i בין 1 לבין k.

כלומר, יתרמו לדטר' רק תמורות שבהן התמורה מחזירה עבור i בין לבין k (כלומר, עבור שורות A) ערך בין 1 לבין k (כלומר, עמודות בתוך A). שאר התמורה (עבור שורות k+1 עד k+l) יחזירו ערכים מתוך מה שנותר – כלומר מתוך k+1 עד k+l), או במילים אחרות – התמורה תחזיר עבור שורות ב-B, גם עמודות ב-B.

הגענו למסקנה שהתמורות היחידות שתורמות לדטרמיננטה הן (כל ה)תמורות אשר נותנות תמורות של שורות ב-A חזרה לתוך שורות ב-A, ושורות ב-B חזרה לתוך תמורות ב-B. אין לנו הגבלה נוספת, ולכן תתכנה כל האפשרויות של תמורות בין שורות בתוך A לעמודות ב-A (שזה בדיוק detA) וכנ"ל לגבי B). כל 'צירוף תמורות' שכזה – התמורה הראשונה ב-A והתמורה השנייה ב-B – מהווים חלק מתמורה מלאה על C, כלומר איבר שלם אשר הוא חלק מסכימת המחוברים בדטרמיננטה של C (והוא מכפלה של דטר' של A ושל B עבור תמורות מסוימות בהן).

קרי, הראנו שדטרמיננטה של מטריצה שהיא <u>משולשית בלוקים</u> היא מכפלה של הדטרמיננטות של המטריצות הריבועיות על האלכסון.

54) נוסחת פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ועמודה

נוסחאות אלו תוצגנה **ללא הוכחה**. ההוכחה היא נגזרת ישירה של הגדרת הדטרמיננטה והמשפטים על מטריצות בלוקים.

אם נתונה מטריצה A מסדר n*n, אזי ניתן לקבל את הדטרמיננטה של A בצורה הבאה (נוסחת פיתוח דטרמיננטה לפי עמודה):

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

כאשר A_{ij} מייצגת את המינור ה-ij של A, שהיא המטריצה המתקבלת לאחר החסרת שורה i ועמודה j ממטריצה A.

באופן זהה, ניתן לקבל את נוסחת פיתוח דטרמיננטה של מטריצה לפי שורה:

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

לדוגמא, ניתן למצוא את הדטרמיננטה של מטר' 3*3 ע"י פיתוח לפי השורה הראשונה. נעבור על השורה הראשונה, ונחשב לכל איבר את מכפלתו בדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת ממחיקת השורה הראשונה ומחיקת העמודה בה נמצא אותו איבר. נהפוך סימן לאיברים הזוגיים בשורה, והסכום המתקבל יהיה ערך הדטרמיננטה כולה. קרי:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(כזכור קוים 'ישרים' במקום מעוגלים של מטריצה מסמנים את הדטרמיננטה של אותה המטריצה)

55) סיכום

לעיל הצגנו את עיקרי החומר התיאורטי והמשפטים וההוכחות שנדרשים ללימוד והבנת הבסיס של אלגברה ליניארית. אנו מקווים כי למדתם, השכלתם והצלחתם. אם נהניתם – ספרו לחבריכם, וגם לנו. אם לא נהניתם – ספרו לנו, וספרו לחבריכם שנהניתם.

המחבר (זה אני) הוא סלע רפאלי, סטודנט למדעי המחשב ולפסיכולוגיה באוניברסיטה העברית. אני יליד 1985, גר בבית הכרם בירושלים, ואוהב שוקולד, ועוגות גבינה.

סלע רפאלי

sella.rafaeli@gmail.com